№1.

Ответ: Да, могло.

Пример.

Начальный набор: 1, 1, 1, 1, 48

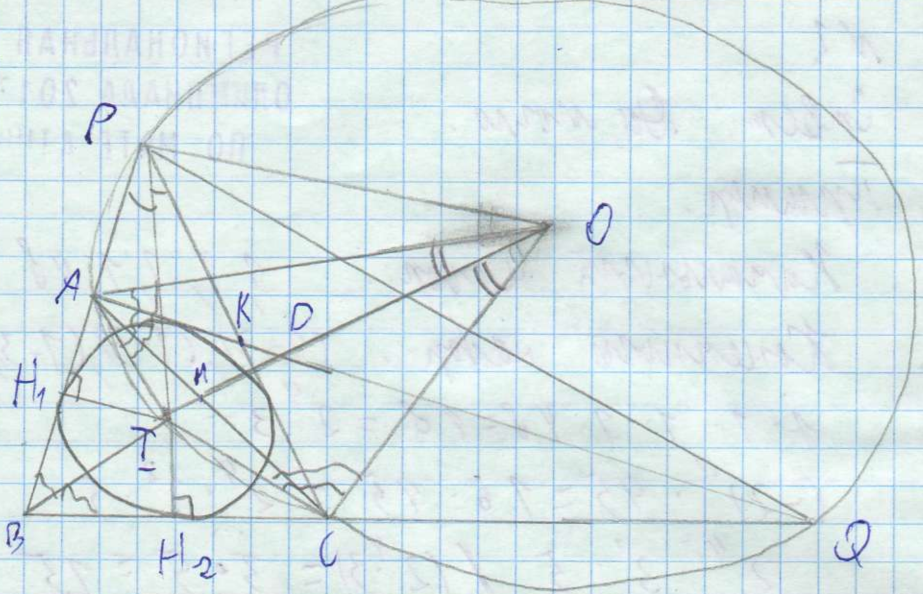
Конечный набор: (1-3), (1-3), (1-3), (1-3), (48-3)

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 48 = 48 = 2^4 3$

$(-2)^4 \cdot 45 = 16 \cdot 45 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \,/\, (2^4 \cdot 3) = 3 \cdot 5 = 15$

№ 2.



Дано: $ABCD$, $BA \cap CD = P$; $AD \cap BC = Q$,
~~ω – окруж~~ I – центр вписанной окружности. O – центр ω описаной около $CIAP$.

Доказать: $Q \in \omega$.

Док-во:

1) Заметим, что дуги AI и IC равны, т.к PI – биссектриса $\angle APC$ (а PI биссектриса, т.к точка I – центр вписанной окружности)

2) ok. Из равенства дуг AI и IC следует $\angle AOI = \angle IOC$. (т.к

Эти центральные углы опирающиеся на равные дуги. ок.

3) $\triangle AOI = \triangle IOC$

$\angle AOI = \angle IOC$

$AO = OI = OC$ (как радиусы) ок.

$\Downarrow$

$AI = IC$. ок.

4) $AI = IC$, $\angle IH_1A = \angle IH_2C = 90^\circ$, $IH_1 = IH_2$ $\Rightarrow \triangle AIH_1 = \triangle CIH_2$ $\Downarrow$ $H_1A = H_2C$

5) $BH_1 = BH_2$ (как касательные), $H_1A = H_2C$ $\Rightarrow BA = BC$

~~6) $\angle BAC = \angle BCA$ (как углы в равноб. $\triangle$)~~

~~$\angle BAC =$~~

6) BI – медиана, биссектриса и высот в $\triangle ABC$ ок

OI – медиана, биссектриса и высота в ~~$\triangle AOC$~~ $\triangle AOC$

Они обе $\cap AC$ в точке M (как медианы, и под углом 90° (как высоты) $\Rightarrow$

~~AQ~~ A и I, и O лежат на одной прямой.

7) Симметрично отобразим рисунок относительно BO.

A перейдёт в C (т.к BO - биссектриса, медиана и высота), а C в A.

B перейдёт в B
самy себя

ω перейдёт в ~~ω~~, а окружность с центром в I в саму себя.

BC перейдёт в BA

P в P'

8) $\triangle BPQ \sim \triangle BAC \Rightarrow BQ = BP$

~~PQ ⊥ BO~~

$\angle BPQ = \angle BQP$ (т.к $\triangle BPQ$ - равноб.)

+

~~9) $\angle CAP + \angle ACQ + \angle CQP + QPA = 360^\circ$~~

$PQ \parallel AC$ (т.к $\triangle BAC \sim \triangle BPQ$)

10) CAPQ - равноб. трап. около которой можно описать окр.

ω - описана для $\triangle PAC \Rightarrow Q \in \omega$.

№ 5.

Заметим, что произведение рационального на иррациональное даёт иррациональное.

Пусть слева от строк k иррациональных и $(50-k)$ рациональных. ~~А свер~~ Тогда сверху от столбцов k рациональных и $(50-k)$ иррациональных. Т.к каждое число слева умножается на каждое число сверху, то все рац. слева умнож на все ирр. сверху ~~…~~, а все рац. сверху умножатся на все ирр. слева.

Посчитаем кол-во этих умнож рац. • ирр.

$$(50-k)^2+k^2=2k^2-100k+2500=$$
$$=2(k^2-50k+1250)=2((k-25)^2+625)$$

То есть min ирр. дост. при $k=25$, и он равен 1250

Тогда рац. чисел

$50^2 - 1250 = 1250$.

Пример.

	26	27	...	$\sqrt{2^{51}}$	$\sqrt{2^{53}}$	...	$\sqrt{2^{99}}$
1							
2							
...							
25							
$\sqrt{2}$							
$\sqrt{8}$							
...							
$\sqrt{2^{49}}$							

Мы расставляем числа от 1 до 50 по 25 слева и сверху.

Затем мы расставляем $\sqrt{2^{2n-1}}$, $n \in N$, $n \le 50$. Т.к корень из нечётной степени двойки числа иррациональн, то очевидно что эти числа ирр. Заметим, что их произведение это корень из произведения двух нечётных степеней (а неч.+неч.=ч.), а корень из чётной степени — рац. ч.

В примере 1250 рац. чисел

$_2$ 25 слева гориз. 1 · 25 (сверху гориз.)

+ 25 (слева гор.) · 25 (сверху гор.)

$25 \cdot 25 + 25 \cdot 25 = 25^2 \cdot 2 = 1250$

10. 6.

Докажем по индукции, что a_n содержит по крайней мере n разл. пр. дел.

a_n – n-ное натур. число.

База для a_1 очевидна. (т.к. $a_1 \neq 1$, иначе сумма квадратов нескольких нат. чисел равна 1, что нев.)

Переход:

Пусть для a_n это выполнено.

Т.к. a_n – сумма квадр. всех предыдущих, то следующее число будет $a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(a_n+1)$

Очевидно, что $\text{НОД}(a_n; a_n+1) = 1$

По алгоритму Евклида.

Тогда (a_n+1) имее хотя бы один простой делитель, и он отличен от делителей a_n. Следовательно в a_{n+1} входят хотя бы на 1 делитель больше.

Тогда в O_{100} входит по крайней мере 100 простых делителей.

10.7.

Докажем по индукции (по кол-ву вершин)

База (для 3 вершин!) ~~[illegible]~~ очевидна.

Докажем переход

Пусть у нас утверждение доказано для всех ~~[illegible]~~ вершин k ~~(k — количество вершин)~~ от 3 до n.

Докажем для $(n+1)$. Диагональ разбивает многоугольник на два многоугольника с меньшим количеством вершин.

Т.к. ни одна диагональ (в многоуг. выпукл. ⇒ диаг. не выходят) не пересекает другую, то все ~~[illegible] отрезки проведенные~~ диагонали перв. мн. ∈ либо I либо II получивш. многоуг. ~~В которых~~ из них

Тогда каждый Δ из разбиения ∈ либо I либо II.

По предположению индукции в каждом

верно! из них есть по две равные стороны.

Если у какого-то из них эти стороны являются сторонами исх. многоуг., то всё доказано.

Иначе у каждого из I и II многоуг. есть сторона равная рассм. диагонали.

Тогда эти две стороны равны между собой. ч. т. д.

за 1 шаг)