## Задача 1.



При умножении в натуральных числах действительно такое свойство: при уменьшении сомножителей произведение всегда уменьшается. Но можно заметить в данной задаче одно свойство числа 1: при его уменьшении на 3 его модуль увеличивается ($|1| = 1$; $|1-3| = |-2| = 2$). Этим свойством мы и воспользуемся при решении.

Чтобы ~~пр~~ ~~пр~~ пр-ие увеличилось, нам нужно применить операцию четное кол-во раз, т.е 2 или 4 раза. Пр-ие увеличится либо в 4, либо в 16 раз соотв-но. Разберём последний вариант, т.к. к нему проще найти ~~к~~ удовл. пример.

Пусть $n$ – пятое число из данных. Распишем ряд до и после преобразования:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| до | $n$ | 1 | 1 | 1 | 1 | пр-ие: | $n$ |
| после | $n-3$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | | $16(n-3)$ |

Из условия следует, что $P = 15P_0$, или:

$16(n-3) = 15n$

$n = 48$. Действительно, после вычитания пр-ие равно $720 = 48 \cdot 15$.

Ответ: да.

ЗАДАЧА 2.

Дано:

$ABCD$ описан, $I$-центр.

$BA \cap CD = P$

$AD \cap BC = Q$

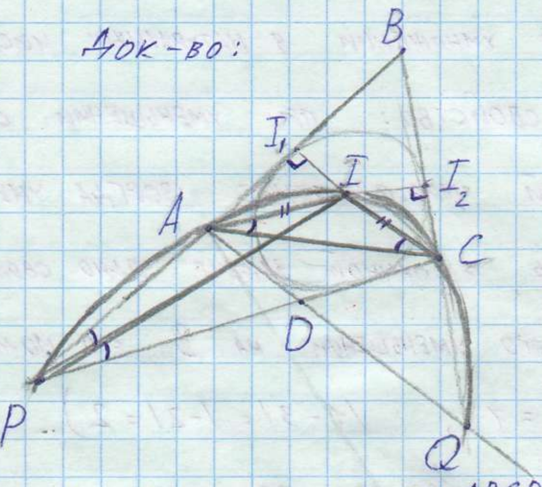
$\triangle AIC$ вписан в $\omega$.

$P \in \omega$.

Док-ть:

$Q \in \omega$.

Док-во:




1. Пусть $\gamma$ – окр-ть, вписанная в $ABCD$.

$\gamma$ вписана в $\angle BAD$, $\angle BCD$ и $\angle P$ => $AI$, $CI$, $PI$ – <u>биссектрисы</u> соотв. углов.

2. $P, A, I, C \in \omega$ => $PAIC$ вписан, $\angle P + \angle AIC = 180°$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle API = \angle ACI = \frac{1}{2} \smile AI \\ \angle CPI = \angle CAI = \frac{1}{2} \smile CI \\ \angle API = \angle CPI \text{ (по док. в п.1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle IAC = \angle ICA \Rightarrow$$

=> $\triangle AIC$ – равнобедр., $\underline{AI = IC}$. ok.

3. Пусть $I_1$ – т. касания $\gamma$ с $AB$, $I_2$ – с $BC$.

$$\left.\begin{array}{l} II_1 = II_2 = R_\gamma \\ AI = IC \text{ (по док. в п.2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AII_1 = \triangle CII_2 \text{ (по катету и гипотенузе)} \Rightarrow$$

=> $\angle I_1AI = \angle I_2CI$ => $\underline{\angle BAD = \angle BCD}$. ok.

4. $\triangle BPC: \angle P = 180 - (\angle B + \angle BCD)$
$\triangle BQA: \angle Q = 180 - (\angle B + \angle BAD)$
$\angle BCD = \angle BAD$ (по док. в п. 3)
$\Rightarrow \angle P = \angle Q \Rightarrow$ ок.

$\Rightarrow \angle Q + \angle AIC = 180° \Rightarrow QAIC$ - вписан $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $Q \in \omega$, т.к. через 3 точки $A, I, C$ проходит только одна окр-ть, а именно [illegible] $\omega$.

ч.т.д.

+

# Задача 4.

После того, как учитель задумал многочлен $P(x)$, он найдёт коэффициент с наибольшим модулем. Пусть $m$ – длина этого коэфф-та в десятичной записи без знаков "–". Затем он сообщает ученикам одно число $n_1 = 10^{m+1}$. Действительно, теперь каждый коэфф-т находится на своём месте в числе $P(n_1)$.

Теперь дети разбивают число на группы по $m+1$ знаков, начиная с конца. Получается 2018 новых чисел. Поиск коэффициента происходит так:

1. Взять самое последнее число.

2. Если число начинается с нуля, убрать все незначимые нули.

3. Если число начинается с 9, то вычесть из него $10^{m+1}$, а к предпоследней группе добавить 1.

4. Получившееся число – коэфф-т при наименьшей, ещё не заполненной, степени $x$.

5. Убрать число из списка.

Например, если степень $P(x)$ не 2017, а 3:

$n_1 = 100$, $P(n_1) = \underbrace{9}_{4}\underbrace{80}_{3}\underbrace{29}_{2}\underbrace{6}_{1}$.

По алгоритму:

1. $\overset{1}{96} \xrightarrow{-100} \underline{-4}$ ; $\overset{2}{02} \xrightarrow{+1} 03$.

2. $\overset{2}{03} \rightarrow \underline{3}$.

3. $\overset{3}{98} \xrightarrow{-100} \underline{-2}$ ; $\overset{4}{0} \xrightarrow{+1} 1$.

4. $\overset{4}{\underline{1}}$.

Тогда $P(x) = \overset{4}{x^3} \overset{3}{-2x^2} \overset{2}{+3x} \overset{1}{-4}$.

или $P(x) = x^3 + \cancel{\ldots}\ 19704$.

Ответ: $\underline{k_{min} = 1}$.

Задача 3.



Этот алгоритм не работает. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$ и $P(10) = 110$. Тогда $x^2 + 10$ и $x^2 + x$ – подходят

Нет, наверное. Ну, у меня не получилось, но я не знаю почему.

# Задача 5.

I. Найдем зависимость рациональности произведения чисел от рациональности самих чисел.

Пусть $c = a \cdot b$ $(a, b \neq 0)$:

1. $a \in Q$, $b \in Q$ $\Rightarrow$ $c \in Q$ всегда.
2. $a \in Q$, $b \notin Q$ $\Rightarrow$ $c \notin Q$ всегда.
3. $a \notin Q$, $b \notin Q$ : здесь могут быть разные варианты. Чтобы найти лучший случай, положим, что все иррац. числа в таблице имеют вид $k\sqrt{2}$, $k \in Q$. Тогда $c \in Q$.

II. Теперь рассмотрим таблицу, в которой $n$ столбцов рациональны (рац.), а $50-n$ — иррациональные (ирр.):

| × | рац. − $n$ | ирр. − $50-n$ |
|---|---|---|
| рац. − $50-n$ | рац. | ирр. |
| ирр. − $n$ | ирр. | рац. |

Очевидно, количество рац. пр-ий — это сумма всех соотв. клеток (выделено красным), т.е.

$2n(50-n)$.

III. $f(n) = -2n^2 + 100n$ — квадр. функция, принимающая наибольшее значение в вершине: $n_0 = 25$, $f_0 = 1250$.

Ответ: 1250.

Задача 6.

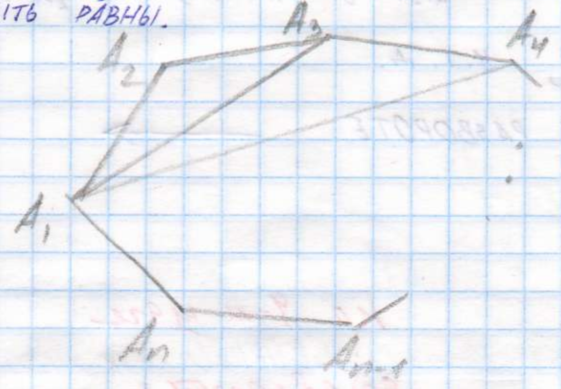
Пусть первое дописанное число — $a_1$, сумма квадратов всех изначальных чисел, а второе — $a_2$, сумма квадратов всех изначальных чисел и квадрата $a_1$.
Можно заметить, что $a_2 = a_1 + a_1^2 = a_1(a_1+1)$ или, в общем виде, для ~~всех~~ $n \in N$ $a_{n+1} = a_n(a_n+1)$.

В худшем случае $a_1$ - простое (т.е. имеет 1 простой делитель; например, $1^2+2^2$). Тогда $a_2$, что следует из выражения, имеет ~~[illegible]~~ 2 делителя - $a_1$ и $a_1+1$; т.к. у двух послед. чисел простые делители всегда различны, то у $a_2$ уже два различных простых делителя. В общем случае, у $a_n$ не меньше $n$ простых делителей, что удовлетворяет $n = 100$.

ч.т.д.

# ЗАДАЧА 7.

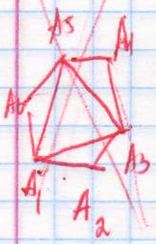
Пронумеруем все вершины по час. стрелке и дадим им соотв. буквы $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Отсечём $\triangle A_1A_2A_3$ и посмотрим, какие именно его стороны могут быть равны.




1. $A_1A_2 = A_2A_3$ : две стороны равны, ч.т.д.

2. $A_1A_2 = A_1A_3$ или $A_2A_3 = A_1A_3$ : сторона равна диагонали, посмотрим дальше. Пусть $A_1A_2 = A_1A_3$. ~~далее~~

Отсечём следующий треугольник, например, диагональю $A_1A_4$.

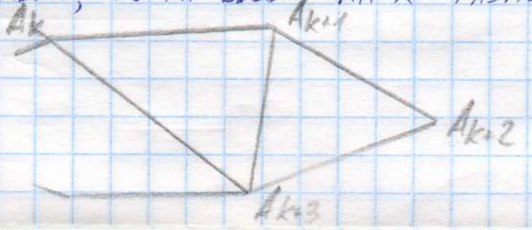


1. $A_1A_3 = A_3A_4 \Rightarrow A_3A_4 = A_1A_2$ : две стороны равны, ч.т.д.

2. $A_1A_3 = A_1A_4 \Rightarrow A_1A_4 = A_1A_2$.

3. $A_1A_4 = A_3A_4$.

В случаях 2 и 3 „новая" диагональ всегда равна одной из сторон многоугольника. Теперь перенесёмся в тот момент, когда весь мн-к разделён и осталось два:

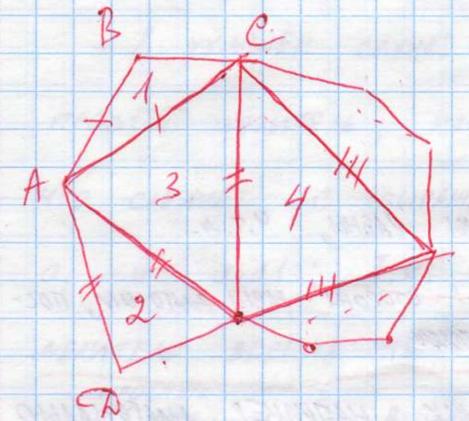


ПРОВЕДЁМ $A_{k+1}A_{k+3}$. ПО ДОКАЗАННОМУ, ОНА РАВНА ОДНОЙ ИЗ СТОРОН, ПОЭТОМУ В $\triangle A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ НЕ ОСТАЁТСЯ ВАРИАНТОВ:

1. $A_{k+1}A_{k+2} = A_{k+2}A_{k+3}$ : ДВЕ СТОРОНЫ РАВНЫ, Ч.Т.Д.

2. $A_{k+1}A_{k+2} = A_{k+1}A_{k+3}$ ИЛИ $A_{k+2}A_{k+3} = A_{k+1}A_{k+3}$, А $A_{k+1}A_{k+3}$ РАВНА ОДНОЙ ИЗ СТОРОН МН-КА, Ч.Т.Д.

ЗАДАЧА 8 НА РАЗВОРОТЕ →




На 4-м шаге „добавляются" сразу 2 диагонали. Почему они равны сторонам AB или BC или AD?

# ЗАДАЧА 8.

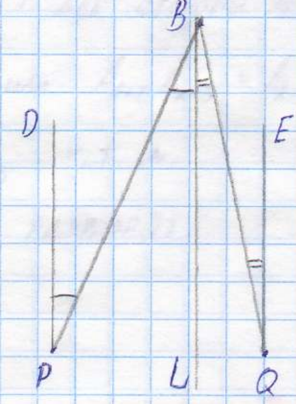
Дано:

$\triangle ABC$ вписан в $\omega$
$DE \parallel AC$, $D \in AB$, $E \in BC$
$P \in \omega$, $Q \in \omega$
$DP \parallel EQ$
$QA \cap ED = X$
$PC \cap DE = Y$

Док-ть:

$\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.

Док-во:




1. (см. рисунок сверху) Построим $BL \parallel DP \parallel EQ$. Как накрест леж. при секущих:

$$\left.\begin{aligned} BP&: \angle LBP = \angle DPB \\ BQ&: \angle LBQ = \angle BQE \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\angle BQE + \angle DPB = \angle PBQ}.$$

2.
$$\left.\begin{aligned} &\angle BAC = \angle BPC = \tfrac{1}{2} \smile BC \\ &\angle BAC = \angle BDY \text{ (соотв. при } AC \parallel DE \text{ и сек. } AB) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle BDY = \angle BPY.$$

Если описать $\gamma$ около $\triangle BDY$, то $\angle BDY = \frac{1}{2} \smile BY = \angle BPY$, а т.к. $\angle BPY$ опирается на эту дугу, то $P \in \gamma \Rightarrow$ **BDPY** вписан; $\underline{\angle BPD = \angle BYD = \frac{1}{2} \smile BD}$.

3. Аналогично 2 п. $\angle BEX = \angle BQX \Rightarrow BEQX$ вписан; $\underline{\angle BQE = \angle BXE = \frac{1}{2} \smile BE}$.

4. $\angle DPB + \angle BQE = \angle PBQ$ (по 1 п.) $\Rightarrow \angle BXE + \angle DYB = \angle PBQ$.

$\triangle BYX$: $\angle XBY + \angle BXY + \angle BYX = 180^\circ \Rightarrow \underline{\angle PBQ + \angle XBY = 180^\circ}$.

ч.т.д.

Осн. рисунок к задаче 8: