№1

Да, могло. Вот пример:

Изначально были числа:

$48; 1; 1; 1; 1 \Rightarrow$ произведение было равно $48 = 2^4 \cdot 3$.

После уменьшения стали:

$45; -2; -2; -2; -2 \Rightarrow$ произведение стало $3 \cdot 15 \cdot 2^4 \cdot (-1)^4 =$
$= 3 \cdot 2^4 \cdot 15 = 48 \cdot 15 \Rightarrow$ оно увеличилось в 15 раз.

№3

Да, он мог так сделать. Предположим что из a_1 по a_{2017} есть 46 штук чисел по $\boxed{44}$, 39 штук по $\boxed{2}$ и остальные по ~~единице~~ $\boxed{1}$ (из 46). Тогда за 43 года он может по разу положить $\boxed{44}$ во все коробки кроме 39 оставшихся $(2017 - 46 \cdot 43 = 39)$. Оставшиеся 39 будут заполняться $\boxed{2}$ каждый год, $\boxed{1}$ будут заполнять на каждом году оставшиеся коробки.

	1	2	…	46	47		…	1976	1977	…	2017	– коробки
1 год:	$\boxed{44}$	$\boxed{44}$	…	$\boxed{44}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	…	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	…	$\boxed{2}$	

$\underbrace{\boxed{44}\ \boxed{44} \dots \boxed{44}}_{46\ \text{штук}}$ $\underbrace{\boxed{2} \dots \boxed{2}}_{39\ \text{штук}}$

	1	2	…	46	47	…	93	94	…	1976	1977	…	2017
2 год:	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	…	$\boxed{1}$	$\boxed{44}$	…	$\boxed{44}$	$\boxed{1}$	…	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	…	$\boxed{2}$

$\underbrace{\boxed{44} \dots \boxed{44}}_{46\ \text{штук}}$ $\underbrace{\boxed{2} \dots \boxed{2}}_{39\ \text{штук}}$

и т. д.

$\boxed{}$ – в прямоугольнике показывается положенное в этот год кол-во камней в эту коробку.

Мы 43 ходов

~~В конце коробки~~ в 39 будет по $43\cdot 2 = 86$

А в других по $44 + 42\cdot 1 = 86$. Одинаково!

Почему нельзя это сделать за k ходов где $k < 43$?

Каждый ход мы добавляем по $(2017 - 39 - 46) + 39\cdot 2 + 46\cdot 44$ $= 2017 + 39 + 46\cdot 43 = 2\cdot 2017 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ за k ходов добавится $k\cdot 2\cdot 2017$, а в каждой коробке (предположим, что у нас получилось):

$$\frac{2\cdot k\cdot 2017}{2017} = 2k$$

Теперь заметим:

1. 46 штук $\boxed{44}$ за $k < 43$ нам удалось положить в $46\cdot k$ коробок

Почему по $2\times\boxed{44}$ нельзя?
$2k < 2\cdot 43 < 2\times\boxed{44}$

2. Осталось $2017 - 46\cdot k$ коробок, все они заполнены только $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$

3. Чтобы кол-во камней равнялось $2k$ и в ней не было ни одного $\boxed{44}$ оно должно состоять только из $\boxed{2}$ добавлений.

4. $\boxed{2}$ за k ходов будет $2\cdot k\cdot 39$ т.е. $(2017 - 46\cdot k)\cdot 2k$ должно быть равно $2\cdot k\cdot 39$.

Приравняем

$$(2017 - 46\cdot k)\cancel{2k} = 2k\cdot 39$$

Равенство достигается только при $k = 43$ (а у нас k по предп. < 43)!

Противоречие!

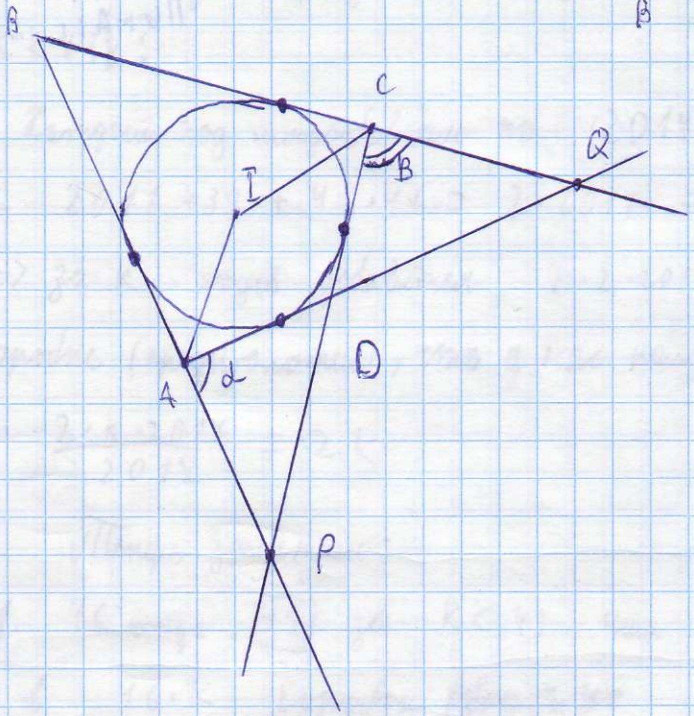
Следовательно только ~~для~~ за 43 хода Паша может добиться нужного. А за меньше — нет

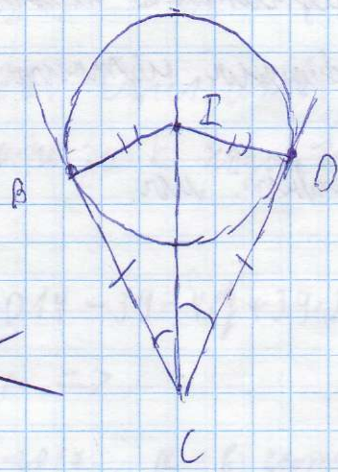
ч. т. д.

Ответ: мог.

Верно. но оценка где?

№ ~~…~~ 2





1. P; A; I; C — лежат на окр. ω $\Rightarrow$ PAIC — вписанный четырёхугольник $\Rightarrow \angle IAP + \angle ICP = 180^\circ$ +

2. ~~Возьмём~~ Обозначим DAP как α, и QCD как β.

3. $\angle BAD = 180 - \alpha$
$\angle DCB = 180 - \beta$

4. т.к. в угле BCD; CB и CD — касательные к окр. то линия к центру этой окр является биссектрисой этого угла $\Rightarrow$ CI — бис $\angle BCD \Rightarrow DCI = 90 - 0{,}5\beta$
аналогично с $\angle BAD \Rightarrow IAD = 90 - 0{,}5\alpha$.

5 $\angle DCI + \angle IAP = 180$

$\angle DCI + \angle IAD + \angle DAP = 180$

$90 - 0,5\beta + 90 - 0,5\alpha + \alpha = 180$

$0,5(\alpha - \beta) = 0$

$\alpha = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QCD = \angle PAD$

6. Заметим, что $\angle IAQ + ICQ = \cancel{9} \; 90 - 0,5\alpha + 90 - 0,5\alpha + \alpha = 180 \Rightarrow$ в четырёхугольнике 2 прот угла равны $180 \Rightarrow$ он впис.

7. Т.к только одна окр ~~прох~~ может проходить через точки A, I, C то толь она вписывает в себя. и четырехуг. $PAIC$ и $AICQ \Rightarrow Q$ - тоже лежит на окр. ω

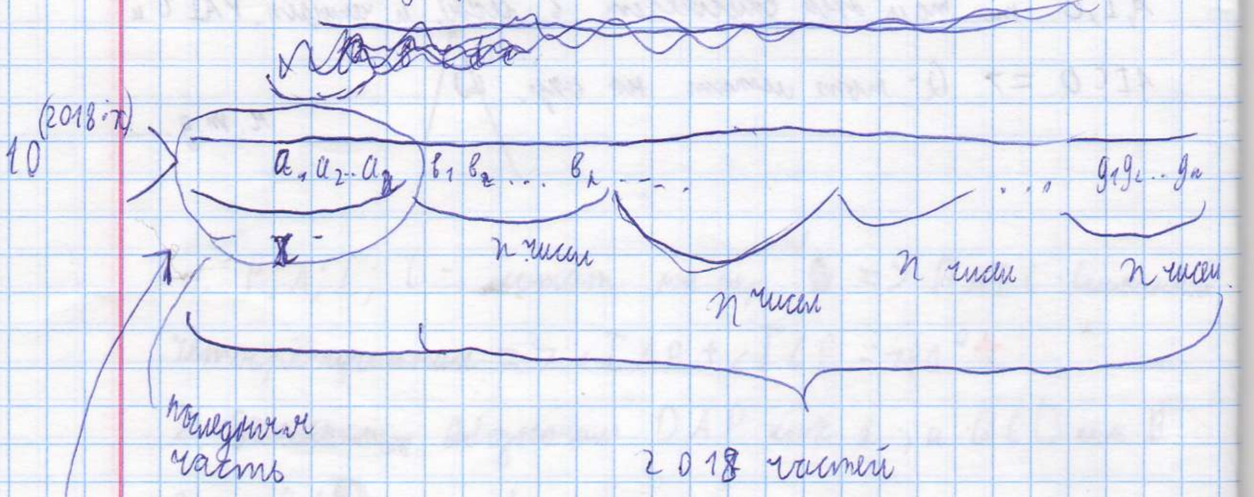
ч.т.д.

№4.

Ответ. при $k = 2$

Пусть учитель задумал какой-либо многочлен. Далее он считает сумму коэффициентов (обозначим за k) и находит ~~некоторую степень~~ такое n, так чтобы любой коэффициент при умножении на k был меньше 10^n.

А затем говорит ученику, как n_1 и n_2: 1 и 10^n. А затем произведение. Ученик для начала понимает что данное произв это $P(10^n) \cdot k$. Затем он делит все это произведение на части:



и замечает, что $k < 10^x$ т.к. если бы k было то последняя ~~разряд~~ часть выходила за пределы и все число было бы больше чем $10^{2018 \cdot n}$ $\Rightarrow$ никакой коэффициент умноженный на k не "вылазит" за пределы своей части. $\Rightarrow$ k равно числу в последней части.

т.к. ~~последнее~~ число в последней части равно:

~~...~~ $1 \cdot k$ (старший коэф равен 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы нашли k.

Далее ученик делит на k. И каждое число в каждой части также делится на k (но сам размер и деление на части остаются прежними) $\Rightarrow$ в каждой части просто напросто остаются сами коэффициенты. (если $k < 10^x$ то и любой коэф меньше 10^x $\Rightarrow$ коэф. не вылезут за рамки своих частей). И ученик может просто поочерёдно выписать коэффициенты и получить загаданный многочлен.

Для $k=1$ единицы нельзя т.к. если мы говорим ~~...~~ $n=0$ то мы узнаем только свободный член. А если же нет, то для получения произведения все кроме свободного коэф и старшего могут быть меньше заданных. А свободный просто дополнит недостающее для суммы.

Применим алгоритм к случаю $P(x) = x^2 + ax + b$

Подставим $n_1 = 1$ и $n_2 = 10$.

$P_1(x) = x^2$, $P_1(1) = 1$, $P_1(10) = 100$ $P_1(1)P_1(10) = 100$

$P_2(x) = x^2 - 11x + 20$ $P_2(1) = 10$, $P_2(10) = 10$ $P_2(1)P_2(10) = 100$.

№5

Для начала заметим что при умножении иррационального на рациональное (Р) всегда будет получатся иррациональное (И), а при умнож. ~~рац.~~ Р на рац. Р.

При умножении И на И может получится как И так и Р.

Но в условиях данной задачи чтобы получилось больше ~~рац.~~ Р мы хотим сделать так, что при $И * И = Р$.

Например все И будут равны $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$... и т.д. тогда прим умнож друг на друга корни перемн и получ Р числ.

~~Теперь заметим, что мы хот~~ Предп., что над таблицей записано a Р-чисел. Тогда там $50 - a$ И-чисел. А слева от таблицы $50 - a$ Р-чисел и a И-чисел. Тогда:

$\left.\begin{array}{l} \text{Р умножаться на Р будет } a\cdot(50-a) \\ \text{И умножаться на И будет } (50-a)\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в таблице будет $2\cdot a\cdot(50-a)$ Р

Заметим, что график этой функции это парабола ветвями вниз. $\Rightarrow$ она максимизируется в вершине. при $a = \frac{-100}{-4} = 25$ и max равен: 1250

Ответ: 1250 Р-чисел — максимум.

№6.

Предположим у нас уже были записаны какие-то числа.

Посмотрим как дописывается следующее число.

записаны

$(\ldots a, b, c, d,)\ X\ ,\ x+x^2$

Обозначим следующее дописанное число за x $(x = a^2+b^2+c^2+d^2 \ldots$

Тогда следующее число будет равняться $(\ldots a^2+b^2+c^2+d^2) + x^2$.

Заметим, что $\underbrace{(\ldots a^2+b^2+c^2+d^2)}_{}$ это x

после числа x будет записано $x^2+x = x(x+1) =$

$\Rightarrow$ последующее дописанное число получается из предыдущего домножением его на его $+1$ $(x*(x+1))$

Теперь заметим что при $x > 1$ простые делители x и $x+1$ полностью различны (как минимум потому что $x+1$ даёт в остатке 1 при делении на все делители x). Также ~~x+1~~ $x+1 \geq 2 \Rightarrow$ у $x+1$ ~~чисел~~ есть хотя бы один собственный простой делитель $\Rightarrow$ при каждом новом дописывании простых делителей у дописанного числа становится больше хотя бы на один.

А так как перв. дописанное число не 1 (была изн. на доске 2 нат числа $\Rightarrow$ допис. число ≥ 2) то у него уже был 1 свой прост делитель и при прод такой операции ещё 99 раз у ~~нас~~.

~~до~~ 100 дописанного числа стало как минимум 100 различных простых делителей.

№7

Для начала докажем такой факт:

При разрезании на треугольники многоуг. (сторон > 3) найдется хотя бы одна диагональ, которая соед. точки через одну (через точку) (). мы режем многоуг на Δ и ... Предположим что $\forall$ ее нет.

Тогда ~~[illegible]~~ нет диаг проход через 2 точки () иначе бы ~~[illegible]~~ в отрезанном нужно, чтобы поделить на Δ была хотя бы 1 диаг через одну $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нет и диаг ~~[illegible]~~ через 3 иначе была либо через 2, либо через одну и т.д. В итоге мы получили, что в нашем разрезании (где кол-во сторон конечно) нет мы запретили все диагонали $\Rightarrow$, а он был разрезан на треуг. Противоречие (сторон > 3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ~~есть~~ в нашем разр. многоуг. есть хотя бы одна такая диаг. Перейдём к задаче.

Обозначим все стороны многоуг за $(a, b, c, d, e, f \ldots)$

~~[illegible]~~ Предп., что они все различны. Теперь найдём нашу диаг через одну  — это равноб треуг. на $a \neq b \Rightarrow$ одна из сторон равна диагонали. Отрезаем этот треуг. и забываем о нём, а диаг. переназываем именем той стороны, которой она была равна. Так повторяем с каждым нов. многоугольником пока не дойдём до ~~[illegible]~~ треугольника. Заметим, что он не будет разносторонним, а так будут стороны (не может быть 2 одинак. т.к. до и после новых стор. все длины были разные) длине => и разн. длин => треуг не равноб ~~о~~. Противоречие!

=> Наше предп не верно и ~~в~~ в заданном шнура есть 2 одинак стороны.