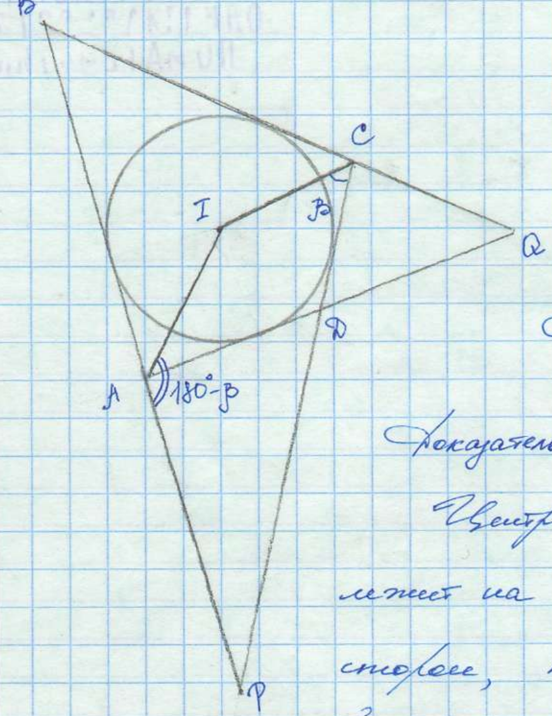
Задача 2



Дано:

I – центр вписанной окр-ти $ABCD$

$P = BA \cap CD$

$Q = AD \cap BC$

ω – описанная окружность около AIC.

$P \in \omega$

Доказать: $Q \in \omega$.

Доказательство:

Центр вписанной окружности лежит на точке, равноудаленной от сторон, то есть на точке пересечении биссектрис. Так как $P \in \omega$, то $PAIC$ – вписанный четырёхугольник. Обозначим $\angle ICD$ как β. По свойству вписанного четырёхугольника противоположные углы $180°$, значит $\angle IAD = 180° - \beta$. $\angle IAB = \beta$ (как смежный с $\angle IAD$. AI и CI являются биссектрисами $ABCD$ (что было положено ранее), тогда $\angle IAB = \angle IAD = \beta$, $\angle BCI = \underset{\text{(совпадает с } \angle ICP)}{\angle ICD} = \beta$. ок.

Отсюда $\angle PAQ = 180° - \underset{2\beta\,(\angle IAB + \angle IAD)}{\angle DAB} = 180° - 2\beta$. (как смежные) ок.

$\angle PCQ = 180^\circ - \underset{\angle BCI + \angle ICD}{\underset{\parallel}{\angle DCB}} = 180^\circ - 2\beta$ (как смежные). ok.

$\angle PAQ = \angle PCQ = 180^\circ - 2\beta$

Равно это является принадлежностью четырёх точек к окружности. ($\angle PAQ = \angle PCQ$, A и C находятся по одну сторону от PQ $\Rightarrow$ точки P, C, Q, A лежат на одной окружности). ok. Теперь покажем, что это и есть окружность ω. ω является описанной для $\triangle ACP$. Окружность, на которой лежат $P, C, Q\, A$ также является описанной для $\triangle ACP$. В силу единственности описанной окружности $Q \in \omega$, ч.т.д. ok.

+

Задача 1

$a, b, c, d, e \in N$

$15abcde = (a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3)$

$abcde > 0 \Rightarrow (a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3) > 0$

Если все множители больше 0, то

$(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3) < abcde$, что нам не подходит. Значит среди них есть какое-то четное количество, которые будут меньше 0 (четное - т.к всё произведение положительно). ~~Т.к a, b, c, d, e~~

Если $n \in N$, то $n-3 < 0$ при $n = 1$ или $n = 2$.

Теперь рассмотрим варианты, которые могут быть. Числа a, b, c, d, e можно перераспределить между собой, поэтому неважно, какие из них будут равны 1 и 2 (конкретно)

1) $a = 2 \quad b = 2 \quad c, d, e > 3$

$(c-3)(d-3)(e-3) < cde < 15abcde$.

2) $a = 1 \quad b = 2 \quad c, d, e > 3$.

$2(c-3)(d-3)(e-3) < 2cde < 15cde < 15abcde$

3) $a = 1 \quad b = 1 \quad c, d, e > 3$

$4(c-3)(d-3)(e-3) < 4cde < 15cde < 15abcde$

4) $a = 2,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 2 \quad e > 3.$

$(e-3) < e < 15e \leq 15abcde$

5) $a = 2,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 1 \quad e > 3.$

$2(e-3) < 2e < 15e < 15abcde$

6) $a = 2,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1 \quad e > 3$

$4(e-3) < 4e < 15e < 15abcde$

7) $a = 2,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 1 \quad e > 3$

$8(e-3) < 8e < 15e < 15abcde.$

8) $a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 1 \quad e > 3.$

$16(e-3) < 16e$, но $16e > 15e.$

$16(e-3) = 15abcde$

$16(e-3) = 15e$

$16e - 48 = 15e.$

$e = 48$

$a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 1,\ e = 48$, тогда

$abcde = 48$

$(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3) = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 45 =$

$= 16 \cdot 45 = 720 \qquad 720 = 48 \cdot 15 = 15abcde$, ~~за~~ это подходит

Ответ: можно.

Задача 6

Пусть первое число, которое допишем будет n. Рассмотрим, какое число мы запишем на следующем шаге. Сумма квадратов чисел, которые стоят перед n есть само число n. Для получения следующего числа осталось к нему добавить n^2.

Заметим, что это будет справедливо на каждом шаге, то есть последнее число, написанное на доске есть сумма квадратов всех предыдущих, значит если последнее число K, то следующее $K+K^2 = K(K+1)$, что является произведением двух последовательных чисел. Наше первое число n, которое мы написали уже имеет хотя бы один простой делитель, так как до него стоит более одного натурального числа, значит сумма их квадратов хотя бы 2. (Все натуральные числа, кроме 1 имеют хотя бы один простой делитель). Теперь посмотрим на произведение двух последовательных чисел $K(K+1)$, т.к $K \geq 2$ и $(K+1) > 2$, то оба эти числа имеют хотя бы по одному простому делителю. Теперь разложим оба числа на простые множители.

Заметим, что если какой-то из множителей числа k совпадает с множителем числа $(k+1)$, пусть это будет x, то тогда $k \vdots x$ и $(k+1) \vdots x$, x - какое-то число очевидно большее 1, значит два кратных ему числа отличаются друг от друга хотя бы на x.
Значит ни один из простых делителей числа k не совпадает с каким-то простым делителем числа $(k+1)$
Значит у каждого следующего числа на доске количество различных простых делителей увеличивается хотя бы на 1 от числа различных простых делителей предыдущего. Мы выяснили, что у первого записанного числа есть хотя-бы один простой делитель, значит (из наших рассуждений) для каждого последующего числа каждый раз это значение будет увеличиваться хотя бы на 1. Т.е у второго числа хотя бы 2 различных простых делителя, у третьего хотя бы 3 ... и т.д
Значит у сотого числа их будет хотя бы 100, чтд.

Задача 5

1) Произведение двух рациональных чисел является рациональным числом. Все рациональные числа можно представить в виде конечной десятичной дроби, понятно, что при перемножении двух таких чисел ответ также будет являться конечной десятичной дробью. ?

2) Произведение рационального на иррациональное является иррациональным числом. Иррациональное число можно представить как бесконечную десятичную дробь. При умножении на что-то конечное (кроме 0), получим опять-таки бесконечную дробь.

(Вроде это есть в школьном курсе и можно не доказывать).

3) Произведение двух иррациональных чисел может быть как рациональным, так и иррациональным.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ – рациональное

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ – иррациональное.

Теперь рассмотрим подробнее произведение двух иррациональных чисел.

Если $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ – рациональное, то $ab = x^2$

иррациональные $\Rightarrow a \neq x_1^2,\ b \neq x_2^2$ $\quad x_1, x_2$ – любые числа

$x^2 \cdot z^2 = (xz)^2$ – Произведение квадратов чисел – квадрат какого-то числа

Теперь покажем, что можно расположить числа (иррациональные в табличке так, чтобы все произведение ~~был~~ (ирр · ирр) были рациональными числами)

	$\sqrt{n^2\cdot x}$	$\sqrt{k^2\cdot x}$	$\sqrt{l^2\cdot x}$	...
$\sqrt{x}$	nx	kx	lx	
$\sqrt{z^2\cdot x}$	nzx	kzx	lzx	
⋮				

n, k, l, z, x – различные рациональные

x – не является квадратом. чего?

Тогда при перемножении под корнем образуется квадрат какого-то рационального числа и иррациональность пропадает.

Изначально числа иррациональны, т.к. квадратов под корнем нет, а корни таких рациональных чисел – иррациональны. Уточнение, почему $n^2\cdot x$ не является квадратом верно, т.к. если мы разложим всё? на простые множители, то каким-то одинаковым множителям не достанется пары, т.к. их (одинаковых множителей каких-то) точно будет н.ч. число иначе бы x являлось квадратом.

n – цел.
x – рац.

Теперь задача сводится к созданию наибольшего количества пар чисел (одно из столбца, другое из строки) таких, что это два иррациональных и два рациональных.

У нас есть 50 одних и 50 других. Очевидно, что это 25×25 и 25×25, так как произведение чисел, сумма которых n максимальна, когда их значения максимально близки друг к другу

в нашем случае можно просто доказать, что, если

А если нет, то не так, это ли?

$50 = 2a$, то $a^2 > (a-n)(a+n)$, т.к

$a^2 > a^2 - n^2$ при $n > 0$.

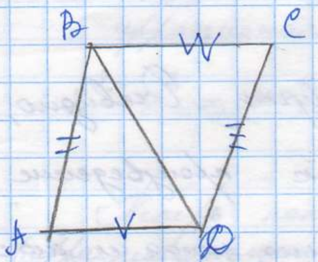
Все остальные получившиеся произведения будут иррациональное на рациональное => ирр,

то есть максимальное число произведений в таблице рациональных, и это число

$25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$.

Задача 7

Начнём с простого. Докажем этот факт для выпуклого четырёхугольника. В нём мы можем



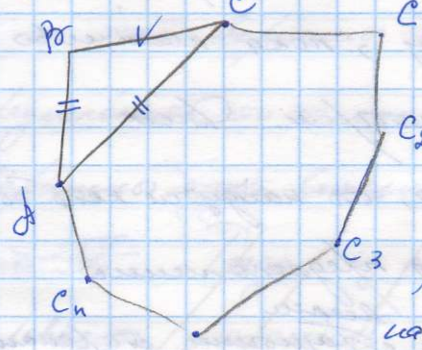
провести только одну такую диагональ и получить два равнобедренных треугольника. Пусть нам четырёхугольник ABCD и $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ – равнобедренные. Начнём с $\triangle ABD$

Мы не хотим, чтобы $AD = BA$, значит BD равен одной из сторон AD или BA. Аналогично с $\triangle BDC$ BD равен BC или AD. Из этого следует, что BD равен двум сторонам четырёхугольника. Значит там точно найдутся две равные стороны.

Теперь докажем, что при любом разрезании многоугольника по непересекающимся диагоналям, найдется такой $\triangle$, две стороны которого являются сторонами нашего многоугольника.

Когда разрезаем многоугольник по диагонали, получаем два многоугольника с меньшим числом углов, чем в исходном, и соответственно сторон. Теперь после каждого разреза будем оставлять многоугольник, где ~~больше количество~~ стороны исходного м-ка идут подряд. (исходного) (или уже искомый Δ) ~~подряд идущих сторон многоугольника~~. Таким образом в конце останется треугольник две стороны которого – стороны исходного многоугольника.

*



Теперь предположим, что в каком-то многоугольнике нашлось разрезание по непересекающимся диагоналям на р/б Δ и все стороны многоугольника неравны между собой. Найдём в нем треугольник, две стороны которого являются сторонами многоугольника. Пусть это будет ABC, где AB и BC стороны исходного многоугольника. Значит $AB \neq BC$ ΔABC – р/б, значит $AC = AB$ или $AC = BC$. Пусть изначальный многоугольник был $ABCC_1C_2 \ldots C_n$. Теперь рассмотрим оставшийся $ACC_1C_2 \ldots C_n$. Заметим, что это выпуклый многоугольник, все стороны которого различны между собой, т.к AC равна одной из сторон, которая точно не равна ни одной из оставшихся. Количество сторон этого многоугольника уменьшилось на одну. И его как-то удалось разбить на равнобедренные Δ, Из доказанного ранее, в нём также найдётся Δ с двумя сторонами уже нового многоугольника. Значит операцию можно повторить много раз, пока количество сторон не станет равным четырём. Для 4-х угольника уже доказано, что найдутся хотя бы две равные стороны. А по предположению мы получили 4-х угольник с ^(всеми) разными сторонами. Получили противоречие. Значит если выпуклый многоугольник разрезать по непересекающимся диагоналям на р/б Δ, то найдется 2 одинаковые стороны.

(*) Более строго можно доказать, что найдется такой треугольник тем, что кол-во непересекающихся диагоналей многоугольника (n-угольника) n − 3 (т.к при разрезании n-угольник

Доказать надо!

превращается в $(a+1)$-угольник и $(b+1)$ угольник, где $a+b=n$. Таким образом у 3-угольника их 0, у четырехугольника □ = Δ + Δ + (диагональ разреза), значит $0+0+1$ у 5-уг $0+1+1=2$ и т.д).

Значит. Если возьмем вершину n-уг. и две прилег. стороны не образуют ~~с ней~~ Δ по разрезанной диагонали, то из этой вершины проведена диагональ. Если предположить, что такого Δ не найдется, то из каждой вершины будет выходить диагональ, ~~тогда диагоналей~~ $\cancel{\frac{n}{2}}$. Тогда из первой вершины можно будет проводить диагональ $n-3$ способами, при которых многоугольник также делится на $(a+1)$ и $(b+1)$ угольник, где это должно выполняться но тогда для 4-х угольника нет способа провести первую такую диагональ.

Можно я просто скажу, что 4х уголь = Δ + Δ. 5-уголь = 4х уголь + Δ и т.д тогда в любом случае можно n угольник представить как $(n-1)$ угольник + Δ по уже готовому разрезанию, когда Δ присоединяется справа... o_o

Это доказывается [illegible]