10-1.

Если мы имеем сомножители a, b, c, d, e, то предположив, что можно, имеем

$$15abcde=(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3) \quad (*)$$

т.к. $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$, то $15abcde>0 \Rightarrow$ и

$$(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3)>0 \quad (1)$$

Об. $A=\{a-3; b-3; c-3; d-3; e-3\}$

I Если в A нет отрицательных чисел, то очевидно, что $|a|>|a-3|$

$|b|>|b-3|$ и т.д. $\Rightarrow |a||b||c||d||e|>|a-3|\cdot|b-3|\cdot|c-3|\cdot|d-3|\cdot|e-3|$.

А т.к. все числа лежащие в A положительны, то $abcde>(a-3)(b-3)(c-3)(d-3)(e-3)$, что противоречит условию.

II Если в A есть отриц. числа, то из условия (1) их 2 либо 4.

При этом из условия (*)

$a-3, b-3, c-3, d-3, e-3 \geq -2$ (2)

$15abcde$ кратно 5 и 3 $\Rightarrow$ среди чисел множества A ~~хотя б~~ а) хотя бы два числа, одно из которых кратно 3, другое 5 б) хотя бы одно число кратное 15 а) Пусть $(a-3) \vdots 3$ и $(b-3) \vdots 5$

Из условия (2) $a-3>0$ и $b-3>0$, тогда среди чисел мн-ва A 2 отрицательных, но заметим, что $\frac{(p-3)(t-3)}{pt} \leq 4$, если $p, t \in \mathbb{N}$ (из условия г и натуральности p, t)

В данном случае произведение выросло не более чем в 4 раза, т.к. выше доказывалось что положительные ~~числа~~ члены A ~~не увеличивают~~ уменьшают его.

б) Пусть $(a-3) \vdots 15$, тогда замечаем, что

$15 \cdot 48 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 45 \cdot (-2)(-2)(-2)(-2)$, т.е.

~~ответ~~ это действительно возможно.

Путем данных рассуждений я подобрал пример, показывающий, что можно

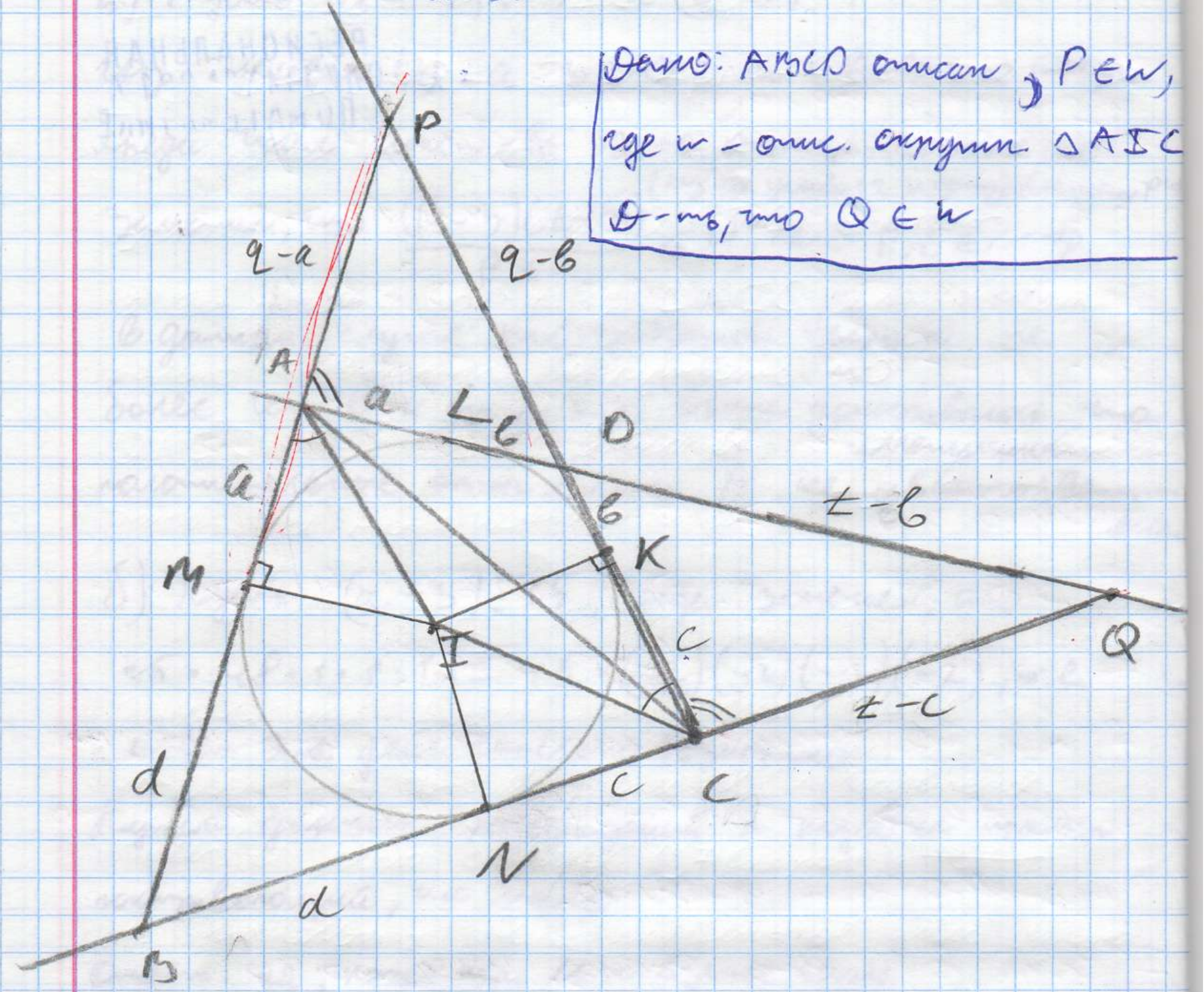
Ответ: да; например если взять числа

48, 1, 1, 1, 1

10.2.

Дано: ABCD описан, $P \in w$, где w – опис. окружн. $\triangle AIC$

Д-ть, что $Q \in w$



Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны. Исходя из этого обозначим

$PM = q = PK$, $AL = AM = a$ $DL = DK = b$ ок

$CK = CN = c$; $BN = BM = d$ и $QL = QN = t$ ок

$PAIC$ вписан в w по условию $\Rightarrow$

$\angle PAI + \angle ICP = 180^\circ$, но так смежные $\angle PAI + \angle BAI = 180^\circ$

Значит $\angle DAI = \angle ICD$ ок.

Тогда $\triangle IKC = \triangle IMA$ как прямоугольные по катету $(MI = KI)$ и углу $\Rightarrow$

$AM = KC$ - как соотв. элементы, т.е. $\boxed{a = c}$ ок.

$\triangle PBC$ и $\triangle QAB$ описаны около окружности $\Rightarrow$ если её радиус r, то

$$r = \boxed{\frac{S_{PBC}}{q+c+d} = \frac{S_{QAB}}{t+a+d}} \text{ ок.}$$

Тогда по формуле Герона

$$\sqrt{\frac{d \cdot c q}{q+c+d}} = \sqrt{\frac{d a t}{t+a+d}} \Rightarrow \text{т.к. } a = c, \text{ то ок.}$$

$$\frac{q}{q+a+d} = \frac{t}{t+a+d}, \text{ значит } q(t+a+d) = t(q+a+d) \text{ и}$$

значит $t = q$ ок.

Тогда $\triangle PAD = \triangle Q\cancel{DC}CD$ по III признаку:

$t - b = q - b$ $(QD = PD)$ ок

$t - c = q - a$ $(QC = PA)$ ок.

$b + c = b + a$ $(DC = AD)$ ок. $\Rightarrow \angle DQC = \angle APD$ как ~~знач~~ соотв. элементы и $\angle DCQ = \angle PAD$

Значит в $IAQC$:

$\angle AIC + \angle DQC = \angle AIC + \angle APD = 180°$ (из условие вписанности в ω PAIC) и

$\angle IAD + \angle ICQ = \angle IAD + \angle PAD + \angle ICP = 180^\circ$

(из условие вписанности PAIC)

Значит по признаку QAIC вписан в окружность, но т.к. у $\triangle AIC$ существует только 1 описанная окружность, то QAIC и PAIC вписаны в одну окружность, значит Q тоже лежит на ω.

10.3.

Пусть мы имеем 3 вида чисел и назовем их большое, среднее и маленькое. Отмечены одно большое, 1974 средних и ~~1974~~ 42 маленьких. Если маленькое число равно a_0, то среднее равно $42a_0$, а большое $42 \cdot 42a_0 = 1764a_0$. Рассмотрим, например, $a_0 = 1$. Тогда после первого хода мы будем иметь 1 коробку с 1764 камнями; 42 коробки с 1 камнем и 1974 коробки с 42 камнями.

Рассмотрим дальнейшую стратегию.

из ~~43~~ x ходов ~~только~~ не более чем в ~~43~~ x

коробках будет положена большая куча камней.

Значит хотя бы в ~~1974~~ $2017-x$ коробках будут

лежать только средние и маленькие кучи

Но и маленькую кучу положить в какую-либо

из этих коробок мы не можем, т.к. тогда

сумма камней в ней будет не более чем

$1+\cancel{42\cdot 43=1765}\ (x-1)42$, а в коробках куда попала

большая куча сумма не менее чем $1764+\cancel{42=2016}\ x-1$

камней за не менее чем 43 хода цель не выполнится

(при $x\le 43$ $42x-41<1763+x$)

Значит хотя бы в ~~1974~~ $2017-x$ коробках будут

только средние кучи, значит сумма камней

в них $\cancel{42\cdot 43=1764+42=1806}\ 42x$

Но тогда ни в одну из коробок не могло

попасть хотя бы 2 больших кучи, ведь тогда минимальная

сумма камней в ней: $(2\cdot 1764+\cancel{41}\ x-2)>\cancel{1806}\ 42x$ при $x\le 43$

Тогда получаем, что большая куча попала

ровно один раз в x коробок и в $2017-x$ лежат

только средние кучи.

Заметим, что положить в коробку, где будет (лежать) большая

~~маленькую кучу~~

кучи такие нельзя, ведь тогда сумма в ней (среднюю кучу)

не менее $42\cdot42+42+x-2 = 43\cdot42+x-2 > 4$

при $x \le 43$.

Значит в x коробках лежит $42\cdot42+$

$+x-1$ камней, а в $2017-x$ коробках по

42 камней, тогда

$42\cdot42+x-1 = 42x$

$41x = 42\cdot42-1$

$x = 43$.

Значит при таких числах минимальное x

действительно 43 и в таком случае камней

во всех коробках поровну

Ответ: мог.

10.4.

заставные 8–80

Т.к. дать обоснование, что больше чем

2 числа минимум затруднительно, то

наименьшее k равно 2.

$k=1$ не может, т.к. по значению многочлена

в 1 точке ~~[illegible]~~ узнать его коэффициенты

невозможно

Ответ: 2.

Вид многочлена?
Подбор числа?

10.5

Заметим, что произведение двух рациональных чисел всегда рациональное число, произведение рационального и иррационального — иррациональное, а произведение двух иррац. может быть как рацион., так и иррац. Но т.к. мы хотим узнать наибольшее кол-во рац. произведений, то возьмем иррац. числа с рац. произведением. Все числа различны, поэтому можно взять, например, такие иррац. числа: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$.

Пусть ~~в столбцах~~ над столбцами записано x рациональных чисел, тогда над столбцами $50-x$ иррац., а ~~над~~ слева от строк $50-x$ рацион. и x иррац. Тогда наибольшее количество рац. произведений, равное сумме кол-ва произведений двух рациональных чисел и произведений двух иррац. чисел, равно ~~x~~

$x(50-x)+(50-x)x = 2(50x-x^2)$

$f(x) = -2x^2+100x$ - парабола, ветви вниз $\Rightarrow$

максимальное значение в вершине при $x = \frac{100}{4} = 25$

и $f(25) = 25 \cdot 25 \cdot 2 = 1250$

т.е. при подборе иррац. чисел, произведение

которых рационально (пример см. выше), можно

получить 1250 рациональных произведений

Ответ: 1250

10.6.

Пусть первое дописанное число x, тогда

x имеет хотя бы один простой делитель

(т.к. записано больше одного натурального числа, то

$x \geq 2$), следующее число равно $x+x^2 = x(x+1)$,

и оно имеет хотя бы 2 различных простых делителя, т.к.

x и $x+1$ имеют хотя бы по 1 простому делителю

x и $x+1$ взаимно просты. Тогда докажем

по индукции, что если n-ное дописанное число

имеет хотя бы n простых делителей, то $n+1$ число

имеет хотя бы $n+1$ простой делитель.

База индукции доказана выше.

Предположим n-ое дописанное число имеет хотя бы n различных простых делителей, тогда

Если последовательность дописанных чисел a_n, то

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(a_n+1)$$

По предположению индукции a_n имеет хотя бы n различных простых делителей, т.к. a_n взаимно просто с a_n+1, то a_{n+1} имеет хотя бы $n+1$ делитель.

Значит действительно сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

10-7.

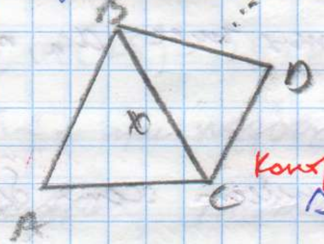
~~Рассмотрим треугольник, со~~

Предположим, что двух равных сторон нет.

Рассмотрим треугольник, состоящий из двух сторон и одной диагонали (он найдется, т.к. весь многоугольник разрезан на треугольники). почему?

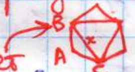
Он равнобедренный и т.к. равных сторон нет, то нужно одна из сторон равна диагонали равна x

Каждая диагональ является стороной двух равнобедренных треугольников, тогда рассмотрим треугольник, сторона которого диагональ x:



AB, AC и CD - стороны многоугольника

Почему такой четырехугольник ABDC найдется?



Контрпример: такой точки D здесь нет

$\triangle BDC$ - равнобедр $\Rightarrow$ сущ. 3 варианта

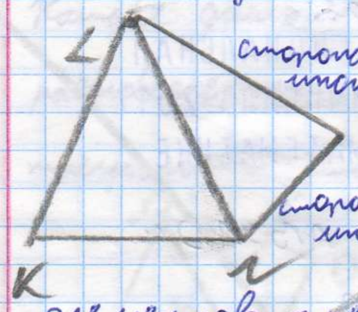
1) $BC = CD$, тогда $CD = x = AB$ - противоречие

2) $BC = BD = x$

3) $BD = CD$

Т.е. любая диагональ равна стороне или другой диагонали, которая в свою очередь равна стороне или третьей диагонали, которая...: которая равна стороне или x, а x также равен стороне. Ведь если каждый раз рассматривать разные треугольники с общей стороной, то мы из условия выпуклости (почему?) обязательно придем к ~~другому~~ треугольнику ABC, стороны которого диагональ и 2 стороны многоугольника. Значит любая диагональ равна какой-~~то~~ либо стороне многоугольника, лежащей по ту же

Рассмотрим последний треугольник при обходе с Δ ABC:



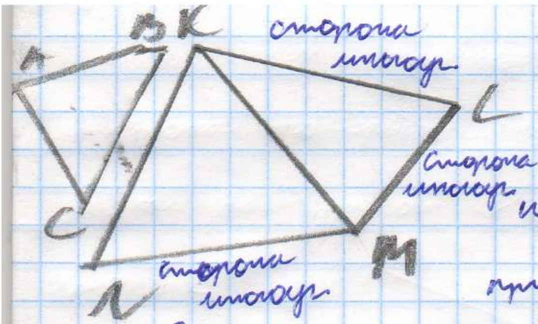
Δ LMN – равнобедр. ⇒ пусть LN = ML

сторона многоуг

При этом выше доказано, что сторона многоуг KL равна какому-то из элементов предыдущего треугольника и также KL = LN = ML и тогда ML = ~~AB~~ либо KL = KN итогда

сторону от диагонали, что и X, т.е. (l) любая диагональ равна стороне многоугольника лежащей по ту же сторону от прямой l, что и Δ ABC. Это следует из условия обхода треугольников (треугольники по другую сторону при таком обходе не рассматриваются)

Теперь рассмотрим последний треугольник при обходе с Δ ABC. Он также состоит из 2 сторон многоугольника и одной диагонали. Выше доказано, что эта диагональ равна стороне многоугольника, лежащей в одном из предыдущих треугольников, но при этом она равна стороне многоугольника последнего треугольника ⇒ 2 стороны многоугольника равны противоречие



KM равна одной из

сторон многоуг.

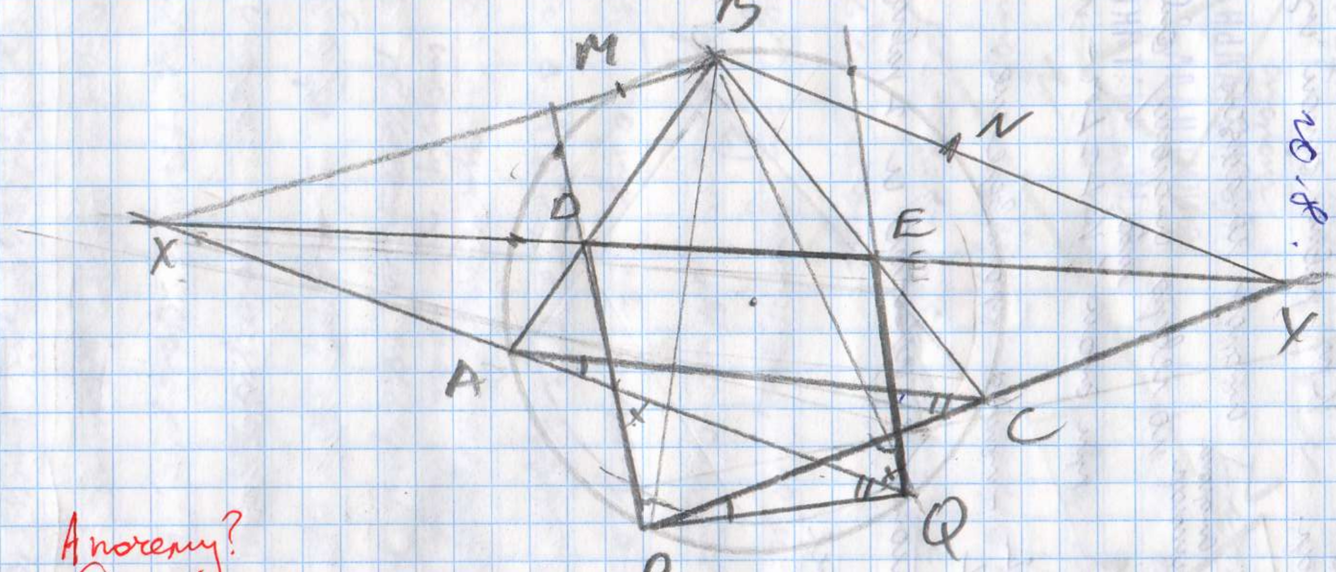
по неверно стороны он нее и
либо
при этом KL = LM — противоречие

либо $KM = KL$
$KM = ML$ — также противоречие.

Значит предположение неверно и 2 равные

стороны найдутся

10.8.



А почему?

I. $PQ \parallel DE \parallel AC \Rightarrow \angle MBN \overset{?}{=} \angle PQ \Rightarrow$
$180^\circ - \angle XBY = \angle PBQ$