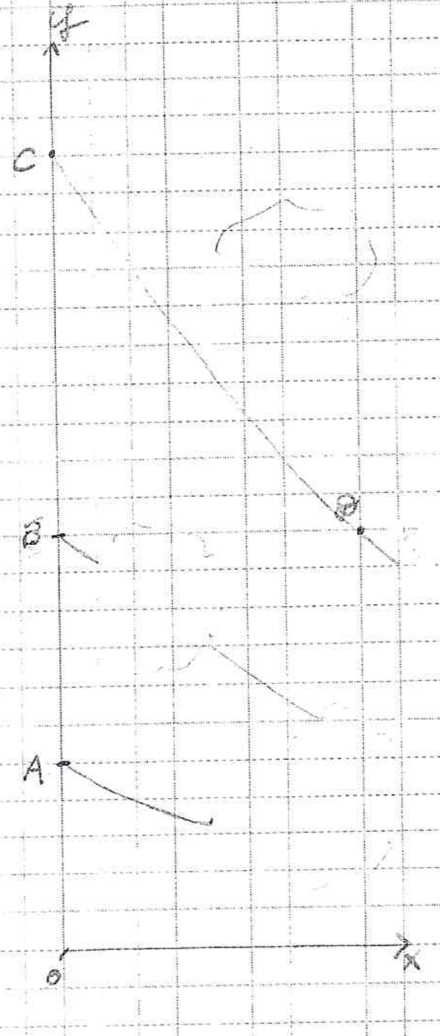
ЛИСТ 1 ИЗ 6 | 10 - 17
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №1

1	2	3	4	Σ
15	0	6	0	21



1) Разберем что происходит с дымом в процессе движения:

Введем время t_1 и t_2, что $t_1 + t_2 = J$.

Паровоз выпустил порцию пара на некотором расс-
-тоянии от начальной точки, а затем пар полетел на восток (ветер с запада на восток). $☆_1$

Тогда если координата y - направление на север, а x - на восток, то (поезд стартует из точки O)

$$y = \frac{at_1^2}{2}$$

$x = Vt_2$, где $t_1 + t_2 = J$

Следовательно, если положить $t_1 = J$, то $x = 0$.

Тогда точки A, B, C - паровоз через время J, 2J, 3J.

При этом, так как паровоз движется по прямой, а фотографии наложены друг на друга, то:

$$|AB| = \frac{a(2J)^2}{2} + x_0 - \left(\frac{aJ^2}{2} + x_0\right).$$

Рассмотрим точку Д (фото 3; $2J \leq t \leq 3J$), она максимальна удалена от линии движения паровоза (BC) и находится на "склейке" двух фото, тогда эта часть пара, которая прошла путь $|BД| = VJ$.

(надо быть внимательным: $|ДB| = 8$ клеток, а не 9.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 2 ИЗ 6 | 10-17
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

2) Пусть длинна одной клетки равна l, тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a(2\tau)^2}{2}+x_0-\left(\frac{a\tau^2}{2}+x_0\right)=6l \\ v\tau = l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a4\tau^2}{2}-\frac{a\tau^2}{2}=6l \\ l=\frac{v\tau}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{3a\tau^2}{2}=\frac{6}{8}v\tau$; $\tau=0$ - не подходит или $\tau=\frac{4v}{8a}=5$ с.

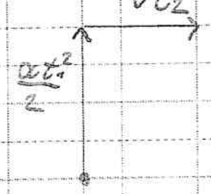
$l=2,5$ (м)

3) Найдем начальную координату x_0, из точки A:

$|OA|=x_0+\frac{a\tau^2}{2}$; $|OA|=5l$, тогда:

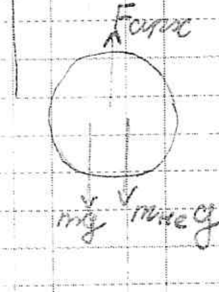
$5\cdot 2,5 = x_0+\frac{0,4\cdot 25}{2}$; $x_0=7,5$ метров или 3 клетки

A_1



- перемещения.

Задача №3



На шар действуют силы тяжести самого шара, гелия в нем, а так же сила архимеда со стороны воздуха.

Шар полетит, когда $F_{арх}-mg-m_{He}g=0$

$F_{арх}=\rho_в V g$; но $P_0=\frac{\rho_в}{M_в}RT$, тогда $\rho_в=\frac{M_в P_0}{RT}$.

$mg=\sigma S g=\sigma\cdot 4\pi r^2 g$; Так как оболочка не растяжима, то давление гелия будет равно атмосферному (оболочка на гелий не действует), тогда, т.к. $P_0 V=\frac{m}{M_{He}}RT$, то $V=m\frac{P_0}{M_{He}}RT$ (температура везде одинаковая)

2) Тогда $F_{арх} = mg + m_{He}g$:

$$\frac{M_B P_0}{\cancel{RT}} \cdot m_{He} \frac{P_0}{M_{He}} \cdot \cancel{RT} \cdot \cancel{g} = 4\pi r^2 \cancel{g} + m_{He} \cancel{g}$$

$$m_{He}\left(\frac{M_B}{M_{He}} P_0^2 - 1\right) = 4\pi r^2$$

$$m_{He} = \frac{4\pi r^2}{\left(\frac{M_B P_0^2 - M_{He}}{M_{He}}\right)} = \frac{4\pi M_{He} r^2}{M_B P_0^2 - M_{He}}$$

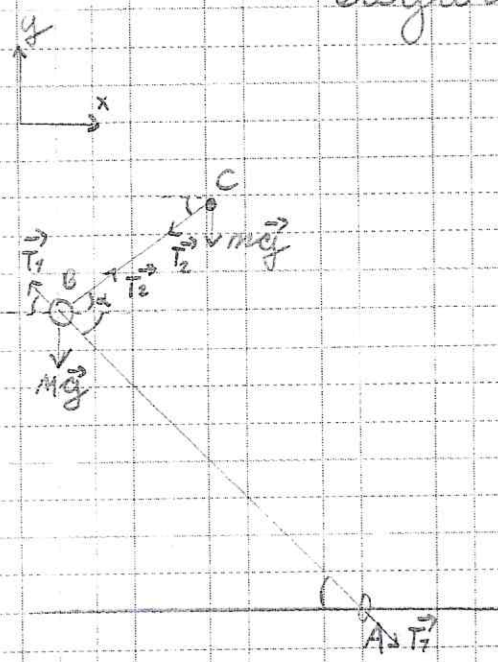
3) Отвечая на второй вопрос, отметим, что объем шара не может быть больше $V_м = \frac{4}{3}\pi r^3$, тогда $F_{арх} \le \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{M_B P_0}{T} \cdot g$, масса шара постоянна: $mg = 4\pi r^2 g$, тогда масса газа: $m_г \le \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{M_B P_0}{T} g - 4\pi r^2 g}{g}$

$$m_г \le 4\pi r^2 \left(\frac{M_B P_0 r}{3T} - 1\right)$$

можно выразить r, как функцию от $m_г$, тогда при любой массе газа шар может взлететь (точнее появляются другие ограничения на его размеры)

4) осталось отметить что при $m_{He} = \frac{4\pi M_{He} r^2}{M_B P_0^2 - M_{He}}$ шар взлетит, так как $\frac{M_{He}}{M_B P_0^2 - M_{He}} < 1$.

Задача №2



1) Стержень AB имеет равное ускорение в любой своей точке, но на A действует только $\vec{T_1}$, тогда ускорение $a_{шо}$ направлено по OX

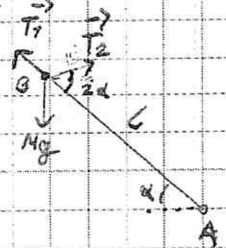
2) В таком случае стержень BC действует как показано на рисунке (направление T_2)

3) Запишем силы в точке B:

OX: $Ma_{шо} = T_2\cos\alpha - T_1\cos\alpha = (T_2 - T_1)\cos\alpha$ (1)

Oy: $0 = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha - Mg$; $(T_2+T_1)\sin\alpha = Mg$ (2)

Сумма моментов относительно точки A равна 0, так как стержень не вращается, а двигается поступательно:



$\sum P = T_1\cdot 0 + Mg L\cos\alpha - T_2 L\cdot\sin 2\alpha = 0$

тогда: $Mg\cos\alpha = T_2\cdot\sin 2\alpha$

$T_2 = \frac{Mg\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$, тогда (2):

$\frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha} + T_1\sin\alpha = Mg$; $T_1 = \frac{Mg(\sin 2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\sin 2\alpha}$

подставим в (1):

$a_{шо} = \frac{Mg(\cos\alpha\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}\cdot\cos\alpha =$

$= \frac{Mg(2\cos\alpha\sin\alpha - \sin 2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}\cdot\cos\alpha = 0$

4) для точки С:

OX: $a_{rox} = -T_2 \cdot \cos\alpha = -\frac{Mg \sin\alpha \cos\alpha}{\sin 2\alpha}$

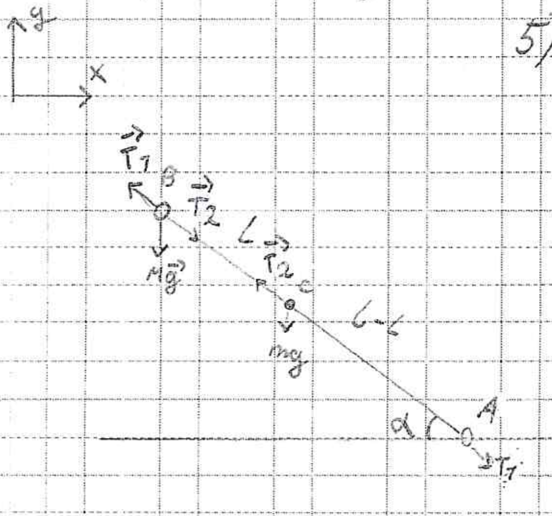
Oy: $a_{roy} = -mg - T_2 \sin\alpha = -\frac{mg \sin 2\alpha + Mg \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$a_{ro} = \sqrt{a_{rox}^2 + a_{roy}^2} =$

$= \left(\frac{M^2 g^2 \sin^2 \cos^2 + m^2 g^2 \sin^2 2\alpha + M^2 g^2 \sin^4\alpha + 2mMg^2 \sin 2\alpha \sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\right)^{1/2} =$

$= a_{ro}$

Второй случай



5) грузик двигался по окружности, тогда его ускорение имеет составляющую (центростремительное ускорение) коллинеарную $\vec{CB}$, тогда сила $\vec{T_2}$ действует в указанную сторону. При этом, все так же, ускорения каждой точки стержня BA равны и направлены параллельно оси X.

Удобно найти ускорение в точке B:

OX: $Ma = T_2 \cos\alpha - T_1 \cos\alpha = \cos\alpha (T_2 - T_1)$

Oy: $0 = T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha - Mg$, тогда

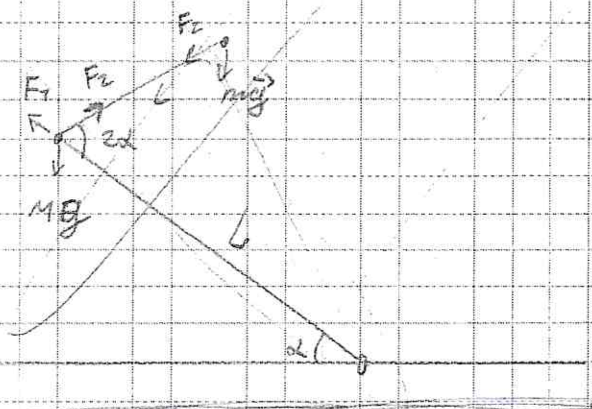
$T_1 - T_2 = \frac{Mg}{\sin\alpha}$; $T_2 - T_1 = -\frac{Mg}{\sin\alpha}$; $a = -\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot g$.

То есть ускорение направленно против OX и численно равно $\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot g$.

В момент, когда груз повернется на 180° ничего принципиально другого нет, разве что ускорение будет направлено в другую сторону, величина не изменится.

ЛИСТ 6 ИЗ 6	10-17
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$*_1$ Посчитаем сумму моментов всей системы относительно точки A, вкруг нее система не ~~двиг~~ крутиться:



$\sum P_A: F_1 \cdot 0 + F_2 l \cdot 2\sin\alpha - $
$- Mg \cdot \cos\alpha$

$*_2$ Тогда

$T_1\cos\alpha = T_2\cos\alpha$, тогда $T_1 = T_2 = \dfrac{Mg\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$

Для точки C:

$Ox: ma_{rox} = -T_2\cos\alpha = -\dfrac{Mg\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$

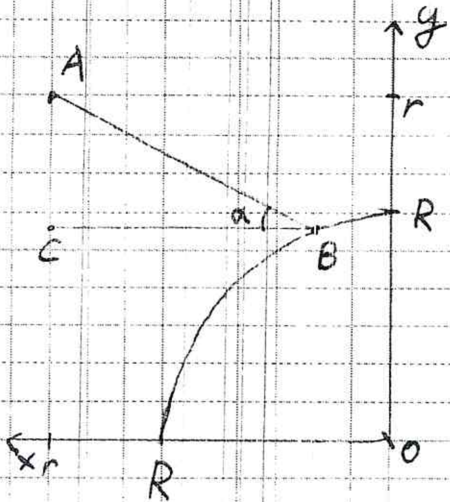
$Oy: ma_{roy} = -(mg + T_2\sin\alpha) = -\dfrac{gm + gM\cos\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

$|a_{ro}| = \sqrt{a_{rox}^2 + a_{roy}^2} = \sqrt{\dfrac{M^2g^2\cos^4\alpha + g^2m^2 + g^2M^2\cos^2\sin^2}{m^2\sin^2 2\alpha}}$

ЛИСТ 1 ИЗ 6	10-17
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

Задача №1

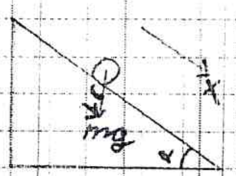
1	2	3	4	Σ
2	3	8	0	13



$A(r, r)$; $B(x, y)$, пусть у точки B координаты (x, y).

Так как шарик движется без начальной скорости, то его движение: $S = \frac{at^2}{2}$.

$S = |AB|$, а так как трения нет, то $a = g\sin\alpha$, где α - наклон AB, но $\sin\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\Delta y}{|AB|} = \frac{r-y}{|AB|}$.



$a_x = \frac{mg\sin\alpha}{m}$

Тогда: $t^2 = \frac{2S}{a} = \frac{|AB|}{g\cdot\sin\alpha} = \frac{|AB|}{g\cdot\frac{r-y}{|AB|}} = \frac{|AB|^2\cdot 2}{g\cdot(r-y)} = \frac{|AB|^2\cdot 2}{g(r-y)}$.

Но: $|AB| = \sqrt{(r-x)^2+(r-y)^2} = \sqrt{r^2+x^2+r^2+y^2-2r(x+y)}$, тогда

$t^2 = \frac{2(2r^2+R^2-2r(x+y))}{g(r-y)}$, но $x^2+y^2=R^2$, тогда $x=\sqrt{R^2-y^2}$,

тогда: $t^2 = \frac{4r^2+2R^2-4r(\sqrt{R^2-y^2}+y)}{g(r-y)} = f(y)$.

Что бы найти минимум воспользуемся правилами дифференцирования:

$\varphi(u(x))' = \varphi'(u(x))\cdot u'(x)$; $\left(\frac{u}{\varphi}\right)' = \frac{u'\varphi - u\varphi'}{\varphi^2}$, тогда

$\cancel{f'(y) = \frac{-2r((R^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)+1)\cdot g(r-y) - (-g\cdot(4r^2+R^2+2r(\sqrt{R^2-y^2}+y)))}{g^2(r-y)^2}}$

ЛИСТ 2 ИЗ 6	10 - 17
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

$$f'(y)=\frac{g(r-y)\left(-4r\left(\frac{1}{2}(R^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)+1\right)-\left(-g\left(4r^2+2R^2-4r\left(\sqrt{R^2-y^2}+y\right)\right)\right)\right)}{g^2(r-y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{(r-y)\left(\frac{4ry}{\sqrt{R^2-y^2}}+1\right)+4r^2+2R^2-4r\sqrt{R^2-y^2}-4ry}{g(r-y^2)}$$

$$f'(y)=\frac{\frac{4r^2y}{\sqrt{R^2-y^2}}+r-\frac{4ry^2}{\sqrt{R^2-y^2}}-y+4r^2+2R^2-4r\sqrt{R^2-y^2}-4ry^2}{g(r-y^2)}$$

критические точки:

$y=\sqrt{R}$ и $y=\sqrt{r}$, но по условию $y\in(0;R)$, тогда

$y=\sqrt{R}$ при этом $(y<\sqrt{R})$ $f'(y)\geq 0$ тогда

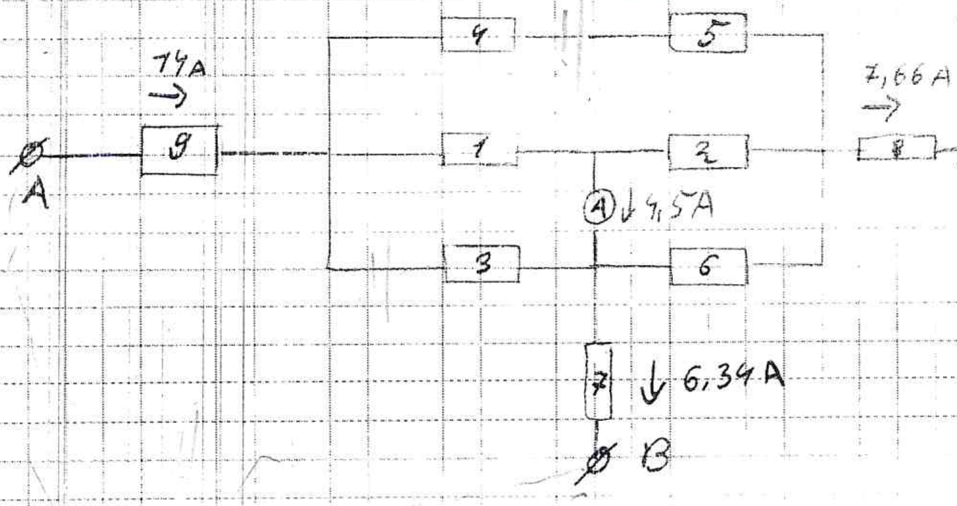
это минимум, тогда $y=\sqrt{R}$.

тогда:

$t^2=\frac{4r^2+2R^2-4r\sqrt{R}}{g(r-\sqrt{R})}$, тогда $t=\sqrt{\frac{4r^2+2R^2-4r\sqrt{R}}{g(r-\sqrt{R})}}$

Задача №2

Перерисуем схему для удобства:

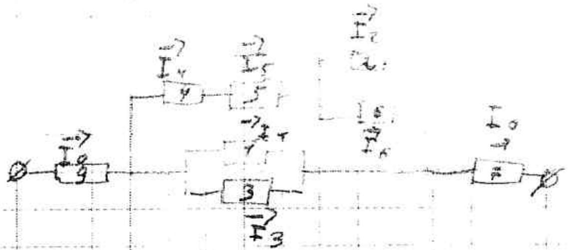


Воспользуемся методом наложения токов, пусть из точки А в В течет ток I_0, тогда:

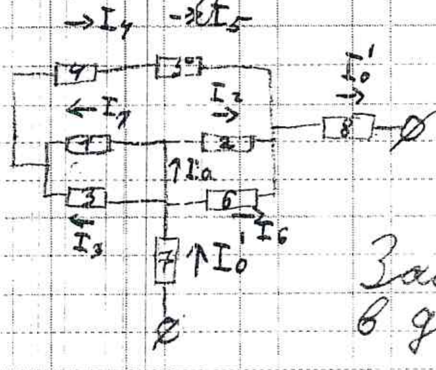
$I_9 = I_0$, $I_7 = I_0$, $I_4 = I_5 = \frac{7}{15} I_0$

$I_2 = \frac{7}{20} I_0$, $I_6 = \frac{7}{60} I_0$,

$I_3 = \frac{7}{30} I_0$, $I_1 = \frac{7}{10} I_0$, $I_A = I_1 + I_2 = \frac{15}{20} I_0$



Теперь пусть ток течет из В в С:



$I_7' = I_8' = I_0'$, $I_2 = \frac{13}{20} I_0'$, $I_6' = \frac{13}{60} I_0'$,

$I_3' = \frac{1}{30} I_0'$, $I_1' = \frac{4}{30} I_0'$, $I_4' = I_5 = \frac{1}{7,5} \cdot I_0'$,

$I_a' = I_1' + I_2' = \frac{47}{60} I_0'$

Заметим, что I_a направлена в другую сторону относительно I_A.

Сложим все тока с учетом направления:

$I_0 = 14А$, $I_{ам} = I_A - I_a' = \frac{15}{20} I_0 - \frac{47}{60} I_0' = 4,5А$, тогда

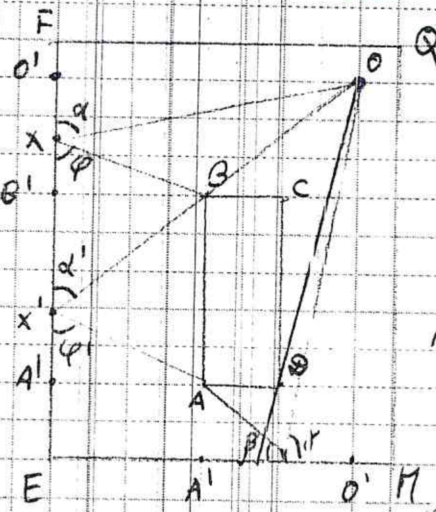
$I_0' = \left(\frac{15}{20} I_0 - 4,5\right) : \frac{47}{60} \approx 7,66 А$, тогда $I_7'' = I_7 - I_7' \approx 6,34А$

$I_8'' = I_8' = 7,66 А$, U_{AC} (в условии АВ) $= U_9 + U_4 + U_5 + U_8$, но

$I_4 = I_5 = \frac{7}{15} I_0 + \frac{1}{7,5} I_0' = \frac{14}{15} + \frac{7,66}{7,5} \approx 1,95$ А, тогда $U_{45} \approx 17,6$ В

$U_{BC} = I_0 \cdot 9 + U_{45} + I_0' \cdot 7 = 787,22$ В. ☆2

Задача №3



1) Что бы была видна стена AB, надо положить зеркало MN.

Так как угол падения равен углу отражения, то и их тангенсы равны, пусть один край зеркала на расстоянии x от O' - проекции O на FE, тогда $B'X = 3L - x$, где L - длинна клетки:

$tg\,\alpha = \frac{8L}{xL}$, $tg\,\varphi = \frac{4L}{3L - xL}$;

$8L(3L - xL) = 4xL^2$; $x = 2$, аналогично для точки A:

$tg\,\alpha' = \frac{8L}{x'L}$; $tg\,\varphi' = \frac{4L}{8L - x'L}$; $64 - 8x' = 4x'$; $x' = \frac{16}{3}$.

Но при этом $tg\,\alpha'$ не меньше $\frac{8L}{6L}$, так как будет мешать угол склада, но $\frac{16}{3} \leq 6$, так что этот вариант возможен. Размеры зеркала: $x' - x = \frac{10}{3}$ клеток. *

2) Аналогично проделаем для точки A если зеркало на стене EH:

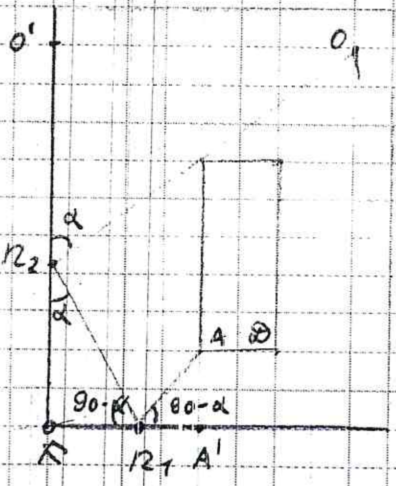
$tg\,\gamma = \frac{16L}{x'''}$; $tg\,\beta = \frac{2L}{4L - x'''L}$; $40 - 10x''' = 2x'''$;

$x''' = \frac{10}{3}L$, но $x''' \leq 2,5L$

иначе эту точку закрывает угол дома D, то есть установить такое зеркало на EH, что бы было видно ~~все~~ всю стену AD нельзя

*: размер зеркала $\frac{10}{3}L = \frac{100}{3}$ м.

3) Так как дано ограничение на количество зеркал, а не на их размер, то я предлагаю просто поставить зеркала размерами во всю стену на стене FE и EH, тогда их будет всего 2, но за 1 зеркало никак не получится увидеть AD - см. предыдущий пункт.



Докажем, что в таком случае видно и A и D

$|O'r_2| = r_2$, $|A'r_1| = r_1$

$tg\, 90-\alpha = \frac{2l}{r_1 l} (\triangle AA_1 r_1)$

$tg\, 90-\alpha = \frac{r_2 l}{(4-r_1)l} (\triangle r_1 r_2 F)$, тогда

$\frac{2l}{r_1 l} = \frac{r_2 l}{(4-r_2)l}$; $r_2 = \frac{8-2r_1}{r_1}$

тогда $tg\alpha = \frac{8l}{r_2 l}$, а $tg\alpha \geq \frac{9l}{6l}$,

тогда, т.к. $r_1 \geq 0{,}5$, то найдется r_1, для которого условие выполняется, например $r_1 = 2$, $tg\alpha = 4$

Аналогично для точки D:

$\frac{2l}{r_1} = \frac{r_2}{6-r_1}$; $r_2 = \frac{12-2r_1}{r_1}$; $r_1 \geq 1$, тогда

при $r_1 = 3$ $tg\alpha' = \frac{8l}{2l} \geq \frac{9l}{6l}$.

Что и требовалось доказать

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 6 ИЗ 6	10-17
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

~~№2 В этой задаче номер тока равен номеру резистора, рассчитывая токи я решил~~