1	2	3	4	Σ
12	1	7	7	27

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 1 ИЗ 11 | 11-1 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

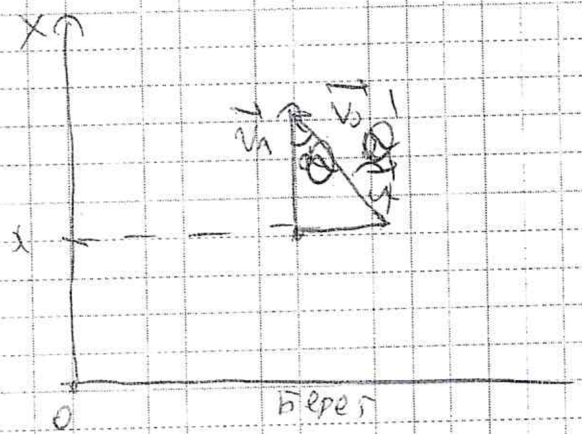
№ 1.11.1

1) Ясно, что в СО Земли лодка движется по прямой перпендикулярной берегу (из условия задачи).

Пусть $\vec{V_л}$ – скорость лодки в СО Земли
$\vec{u}$ – скорость течения реки на данной широте

Тогда: $\vec{V_л} = \vec{u} + \vec{V_0}$ V_0 – скорость лодки в СО воды, модуль всё время тот же, но угол поворота меняется со временем.

Нарисуем векторный треугольник:



и введем ось Ox
$x=0$ – начало берега.
Тогда:
$$\begin{cases} u = \alpha x \text{ при } x \in [0; \frac{L}{2}] \\ u = \frac{v_0}{2} - \alpha(x - \frac{L}{2}), x \in [\frac{L}{2}; L) \end{cases}$$
L – длина берега

а) из условия – в середине реки $u = \frac{v_0}{2} \Rightarrow \frac{\alpha L}{2} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha L = v_0}$

$\theta(t)$ – зависимость, которую надо найти.

б) $\boxed{\sin\theta = \frac{u}{v_0}}$ (из векторного треугольника)

г) $\boxed{V_л = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta}$ (из векторного треугольника)

2) Рассмотрим случай $x \in [0; \frac{L}{2}]$.

из (1б) и (1г) имеем, что:

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{u}{v_0} \\ \frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta \\ u = \alpha x \end{cases}$$

давайте решим эту систему уравнений. Продифференцируем по времени (1б):

$(\sin\theta)' = \left(\frac{u}{v_0}\right)' = \left(\frac{\alpha x}{v_0}\right)'$

$$\boxed{\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{v_0}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

~~Тогда получаем, что $V_0 \cos\alpha = \frac{\alpha \cdot dx}{d\alpha}$~~

~~Подставляем это в (12):~~

~~$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha = \frac{\alpha \cdot dx}{d\alpha}$~~

~~$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha \cdot dx}{d\alpha}$~~

~~$\frac{d\alpha}{\alpha} = dt$~~

~~Проинтегрируем. Ясно, что в начале угол $0°$, а время $t = 0$.~~

~~$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \int_0^t dt$~~

Тогда получаем, что $V_0 \cos\theta = \frac{dx \cdot \alpha}{d\theta}$

Подставляем это в (12): $V_0 \cos\theta = \frac{dx}{dt} = \frac{dx \cdot \alpha}{d\theta}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx \cdot \alpha}{d\theta} \Leftrightarrow d\theta = \alpha \cdot dt$$

Ясно, что угол в начале $0°$ (т.к. $u(0) = 0$), тогда:

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \alpha \cdot dt$$

$$\boxed{\theta = \alpha t}$$ — это до момента достижения середины реки.

Найдём момент достижения середины реки. В этот момент $u = \frac{v_0}{2}$, тогда из (8):

$$\sin\theta_0 = \frac{u}{v_0} = \frac{\frac{v_0}{2}}{v_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = 30° = \frac{\pi}{6}}$$

$\theta_0 = \alpha t_0$

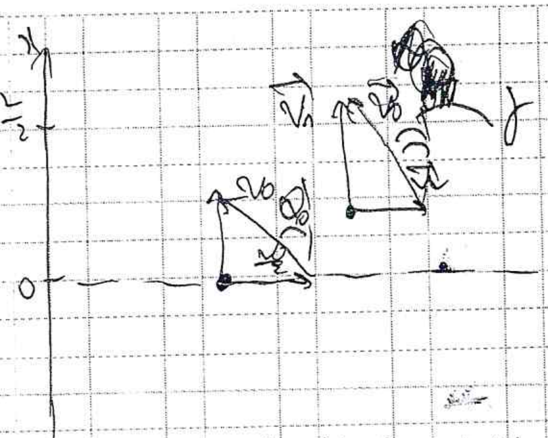
$$\boxed{t_0 = \frac{\theta_0}{\alpha} = \frac{\pi}{6\alpha}}$$ — в этот момент достигли середины реки

3) Теперь аналогично пункту (2) рассмотрим движение от середины реки до конца.

Введём для удобства новую ось X, о прямом середину реки.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 3 ИЗ 11	11-1
	ШИФР (заполняется Оргкомитетом)



по аналогии с пунктом (1) и (2):

а) $v_0\cos\gamma = v_1 = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

б) $\sin\gamma = \frac{u}{v_0} = \frac{\frac{v_0}{2}-\alpha x}{v_0}$

в) $u = \frac{v_0}{2} - \alpha x$

Аналогично решая систему получим:

$$\left(\frac{\frac{v_0}{2}-\alpha x}{v_0}\right)' = (\sin\gamma)' = \left(\frac{\alpha x}{v_0}\right)' \Leftrightarrow \cos\gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-\alpha}{v_0}\cdot\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \boxed{v_0\cos\gamma = \frac{-\alpha\cdot dx}{d\gamma}}$$

подставим это в (3а): $\boxed{v_0\cos\gamma = \frac{dx}{dt} = \frac{-\alpha\, dx}{d\gamma}}$

$$d\gamma = -\alpha\cdot dt$$

Ясно, что угол γ в начале равен $\Theta_0 = \frac{\pi}{6}$. Тогда, время в пределах от t_0 до t:

$$\int_{\Theta_0}^{\gamma} d\gamma = \int_{t_0}^{t} -\alpha\cdot dt$$

$$\gamma - \Theta_0 = -\alpha(t - t_0)$$

$$\gamma(t) = \Theta_0 - \alpha(t - t_0) = \frac{\pi}{6} - \alpha t - \frac{\pi}{6\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \alpha t + \frac{\pi}{6\alpha}\cdot\alpha = \frac{\pi}{3} - \alpha t$$

Ясно, что в момент достижения берега $\gamma = 0°$, т.к. $u = 0$, то есть $\gamma(\tau) = \frac{\pi}{3} - \alpha\tau \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\pi}{3\alpha}}$

В итоге получаем, что:

$\tau = \frac{\pi}{3\alpha}$ — общее время движения

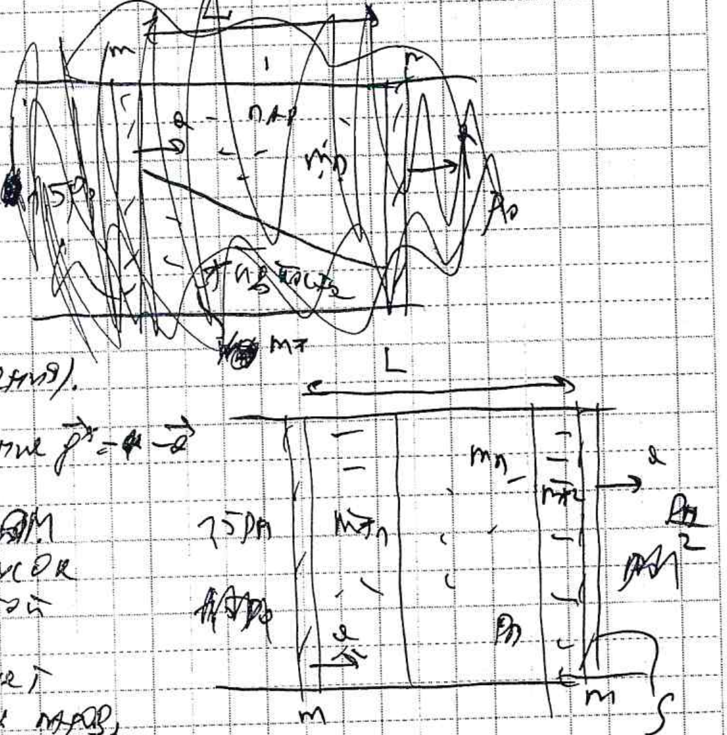
$$\begin{cases} \Theta = \alpha t, \text{ при } t \in [0; \frac{\pi}{6\alpha}] \\ \Theta = \frac{\pi}{3} - \alpha t, \text{ при } t \in [\frac{\pi}{6\alpha}; \frac{\pi}{3\alpha}] \end{cases}$$

12 бал

ЛИСТ 4 ИЗ 10 | 11-1
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 1; 11.2

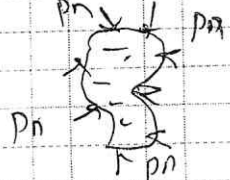
Пусть $p_1 = 1{,}5 p_n$ $p_2 = \frac{1}{2} p_n$



1) Ясно, что система будет двигаться с неким ускорением a. +0,5

Так как вдали от звёзд, то это единственное ускорение (нет ускорения свободного падения).

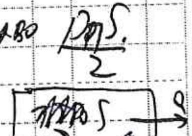
Можно ввести эффективное ускорение $\vec{g}' = -\vec{a}$
Тогда ясно, что жидкость прижмётся к левому поршню.
Ведь иначе, если какой-то кусок жидкости не прижат к другой жидкости или воде, то со всех сторон на него действует только давление насыщенных паров, но ясно, что оно компенсируется. Тогда некому создавать ускорение куску жидкости. Противоречие.



2) ~~т.к. на левый~~ Значит жидкость откинет ~~влево~~, чтобы сила реакции со стороны левого поршня создавала это самое ускорение. Это можно и понять другим образом: эффективное ускорение направлено влево, поэтому жидкость прижмётся ~~влево~~

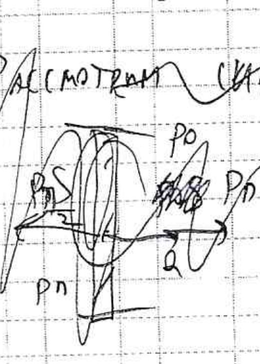
3) а) На всю систему слева действует сила $1{,}5 p_n S$, а справо $\frac{p_n S}{2}$. Значит II закон Ньютона для всей системы:

$$3ma = 1{,}5 p_n S - \frac{p_n S}{2} = p_n S \Rightarrow \boxed{ma = \frac{1}{3} p_n S} \ (1)$$



б) ~~Рассмотрим силы на правый поршень~~

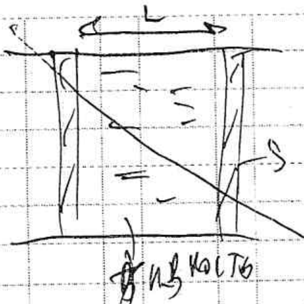
~~p_n давление нас. паров.~~



~~p_n вправо~~ ~~$p_n S - p_0 S = ma$~~

~~$p_n S - p_0 S = \frac{1}{3} p_n S$~~

+0,5



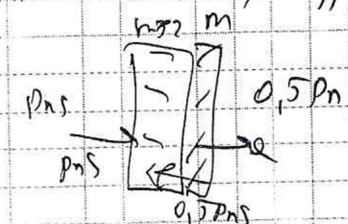
Т.к. $m_n \to 0$, то и объём паров $\to 0$.
Тогда расстояние между поршнями:
$$L = \frac{V_ж}{\rho_ж S} = \frac{m}{\rho_ж S} = \frac{288\text{г}}{0{,}72\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\cdot 50\,\text{см}^2} = 8\,\text{см}$$

3) Можно связать давление паров с плотностью паров:
$$P_n = \frac{\rho_n}{\mu} RT$$

б) (силы на систему „левый поршень $+ m_{ж1}$":
II з-н:

$$(m_{ж1} + m)\,a = 1{,}5 P_n S - P_n S = 0{,}5 P_n S$$
$$m_{ж1} = \frac{0{,}5 P_n S}{a} - m = \frac{0{,}5 P_n S}{\frac{1}{3} P_n S} m - m =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} m - m = \frac{1}{2} m$$

в) (силы на систему „правый поршень $+ m_{ж2}$":
II з-н:



$$P_n S - 0{,}5 P_n S = (m_{ж2} + m)\,a$$
$$m_{ж2} = \frac{m}{2}$$

г) Тогда общая масса жидкости: $m_ж = m_{ж1} + m_{ж2} = m$

Значит будет только жидкая часть! (−)

~~Тогда расстояние~~ Тогда $V_n \to 0$, т.к. $m_n \to 0$, а плотность $\rho_ж = \rho_n$.

Тогда $L = \frac{m_ж}{\rho_ж S} = \frac{288\text{г}}{50\,\text{см}^2 \cdot 0{,}72\frac{\text{г}}{\text{см}^3}} = 8\,\text{см}$

д) Менд–Клайп для пара: $P_n = \frac{\rho_n RT}{\mu} = \frac{\rho_n RT}{\mu}$

е) Масса пара: $m_n = \rho_n V_n$

1 балл

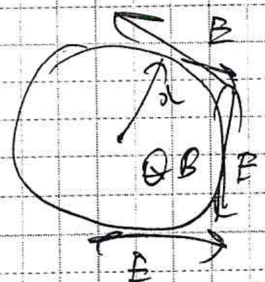
№ 7.11.3

1) Можно записать закон Фарадея для электромагнитной индукции: $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(B \cdot \pi r^2 \cdot \cos 0^\circ)}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \pi r^2$

2) Ясно, что из-за возникновения ~~ЭДС~~ ~~индукции~~ ~~(меняется~~ меняющегося магнитного поля появится вихревое электрическое поле, которое можно найти. Ясно, что работа по окружности радиуса r будет равна $\mathcal{E}_i$. Из соображений симметрии, в ~~каждой~~ каждой точке окружности одно и тоже E:

$E \cdot 2\pi r = \mathcal{E}_i$

$E = \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi r} = \frac{-\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \pi r^2}{2\pi r} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{r}{2}$ +



Тогда сила на заряд q:

$F = Eq = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{r}{2} \cdot q$ +

Тогда за малое Δt импульс заряда изменится на Δp:

$\Delta p = F\Delta t = -\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{r}{2} q \cdot \Delta t = -\frac{\Delta B r q}{2}$ +

Тогда за быстрое включение поля $r \approx const$, поэтому изменение импульса $p = mv_0$

$\sum \Delta p = \sum \left| -\frac{\Delta B r q}{2} \right|$

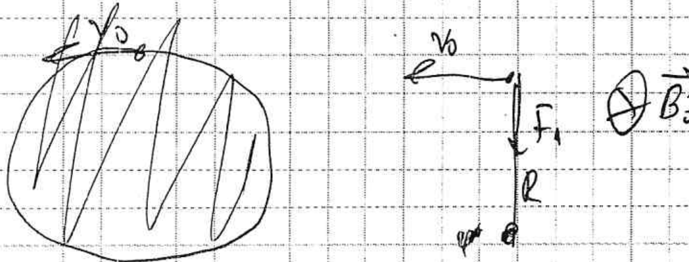
$p = \frac{B_0 r q}{2} = mv_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{B_0 r q}{2m}}$ Σ 5 балл

То есть частица придёт во движение со скоростью v_0.

3) Затем магнитное поле будет постоянным B_0. Будет действовать сила Лоренца. Обращу внимание, что в пункте (2) мы пренебрегли ~~силой~~ ~~Лоренца~~ импульсом силы Лоренца, т.к. время мало, а сила конечна.

Значит ~~зарядик~~ не будет менять ~~модуль~~ ~~своей~~ скорости v_0 ~~т.к.~~ ~~$\vec{F}_л \perp \vec{v}$~~, а значит будет ~~движение~~ ~~по~~ ~~спирали~~, ~~радиус~~ расстояние от центра до заряда будет меняться со временем.

4) Дальше ~~в момент вылетания~~ на частицу будет действовать сила Лоренца $F_1 = Bqv_0$



$a_\text{ц} = \frac{v_0^2}{R}$

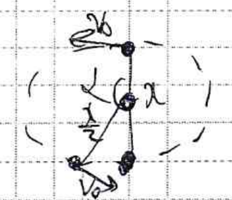
И частица начнет двигаться по окружности радиуса:

$ma_\text{ц} = F_1$

$m\frac{v_0^2}{R} = Bqv_0$

$R = \frac{mv_0}{Bq} = \frac{m\frac{B_0 q x}{2m}}{B_0 q} = \frac{x}{2}$ +0,5

То есть траектория такая:



5) В момент времени τ угол поворота: $\alpha = \omega t$

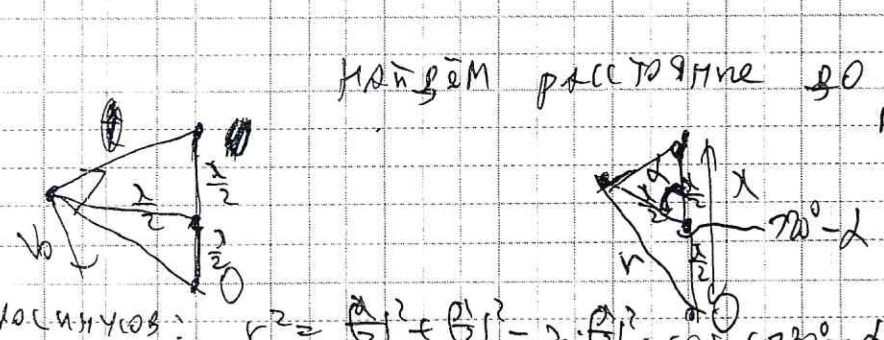
$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{2v_0}{x} \Rightarrow \alpha = \frac{2v_0}{x}\tau = \frac{\frac{B_0 x q}{2m}\cdot 2}{x}\tau =$

$= \frac{B_0 q}{m}\tau$, т.к. $\tau < \frac{\pi m}{Bq_0}$, то $\alpha < \frac{B_0 q}{m}\cdot\frac{\pi m}{Bq_0} = \pi$ 0,5

$\Downarrow$

частицам пройдет не больше чем полуоборота.

Найдем расстояние до O — ось магнита:



по т. косинусов: $r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\cos(180^\circ - \alpha)$

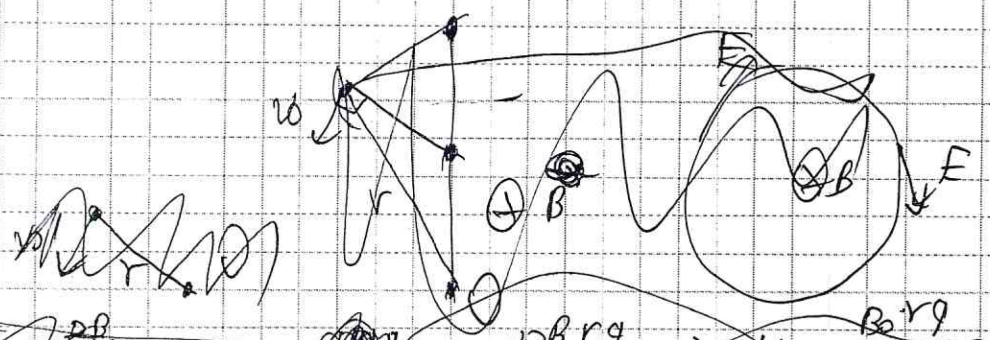
$r^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\cdot\cos\alpha$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 8 ИЗ 11 | 11-1
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

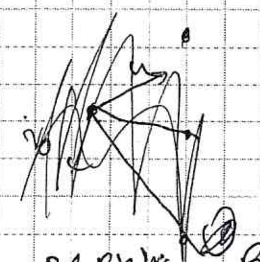
$$\boxed{r=\sqrt{\frac{x^2}{2}(1+\cos\alpha)}},\ \boxed{\alpha=\frac{B_0 q}{m}\tau}$$ +0,5

6) Дальше начнется выключаться магнитное поле B_0.
И по аналогии с пунктом (1) и (2) получим:



$$\Delta p = -\frac{\Delta B r q}{2} \Rightarrow u=\frac{B_0 r q}{2m}$$

Только теперь ~~скорость частицы~~ ~~импульс~~ направлен в ~~орат. сторону~~ другую сторону от v_0:

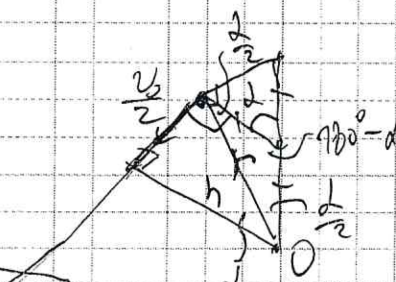


$$\Delta p = -\frac{\Delta B \frac{x}{2} q}{2}$$

$$u=\frac{B_0 x q}{4m}=\frac{v_0}{2}$$

Но так как теперь радиус вдвое меньше, то скорость вдвое уменьшится, ведь импульс направлен против вектора скорости.

7) Тогда после выключения магнитного поля частица будет двигаться по прямой. 0,5



Заметим прямоугольный треугольник, т.к. медиана равна половине стороны.

$$h=r\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=x\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=x\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{B_0 q}{m}\tau\right)}{2}}\cdot\cos\left(\frac{B_0 q\tau}{2m}\right)$$

Тогда время: $\tau_0=\tau+\frac{r\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{v_0}{2}}=\tau+\frac{2ma\sqrt{1+\cos\left(\frac{B_0 q}{m}\tau\right)}}{B_0 q}\cdot\sin\left(\frac{B_0 q\tau}{2m}\right)$

7 балл.

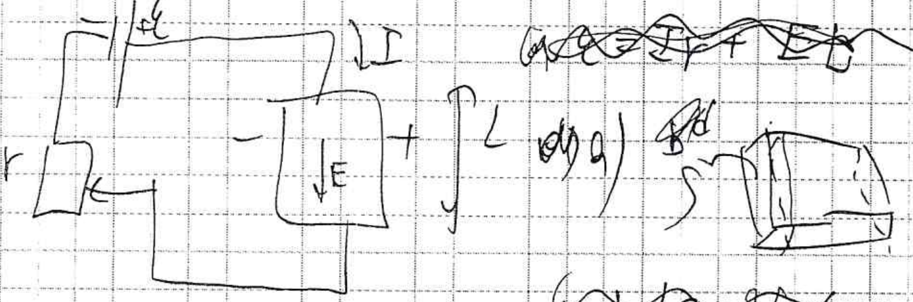
Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 9 ИЗ 19 | 11-1
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 1.11.4

1) ~~Ясно, что можно заменить на резистор полупроводник~~

1)



~~$n \cdot b d e \cdot V \Delta t$~~ $\frac{nSV\Delta t}{\Delta t} = I$

За Δt через S пройдёт заряд $\Delta q = nSV\Delta t e$

Тогда ток: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nSVe = b \cdot d\, Ven$

$$V = \frac{I}{bdne}$$

1б

б) $U_x = E_x L$
$E_x = VB$
$\Rightarrow U_x = VBL = \frac{IBL}{bdne}$

0б

в) $E = \frac{V}{\mu} = \frac{I}{bdne\mu}$

1б

$R = \frac{EL}{I} = \frac{IL}{I bdne\mu} = \frac{L}{bdne\mu}$ 0,5б

г) $R = \frac{\rho L}{bd} \Rightarrow \rho = \frac{Rbd}{L} = \frac{L}{bdne\mu} \cdot \frac{bd}{L} = \frac{1}{ne\mu}$ 0,5б

2) $I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$ 0,5б к2

$U_x = \frac{IBL}{bdne} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{r+R} BL}{bdne} = \frac{\mathcal{E}BL}{\left(r + \frac{L}{bdne\mu}\right) bdne} =$ 0б к2

$= \frac{\mathcal{E}BL}{r\,bdne + \frac{L}{\mu}}$ 0б

Можно построить график и найти n, μ; а затем $\rho = \frac{1}{ne\mu}$

3) Теперь имеем зависимость вида:

$U_x = \cancel{\frac{A}{Br+C}} \; \cancel{\frac{A}{Brn+C}} \; \cancel{\frac{A}{Br+C}}$

$V_x = \dfrac{1}{\dfrac{rbdne}{4BL} + \dfrac{1}{M4B}}$

Зависимость имеет вид: $V_x = \dfrac{1}{rA+B}$

Можно построить график $V_x(r)$ и по нему найти A и B, а по ним найти n, M; а по ним p.

~~Мы~~ линеаризуем график:

~~$U_x \cdot r \cdot A + BU_x = 1$~~ $\dfrac{1}{U_x} = rA + B$

~~$U_x = 1$~~ построим $\frac{1}{U_x}(r)$ и точнее 1б

найдём A и B.

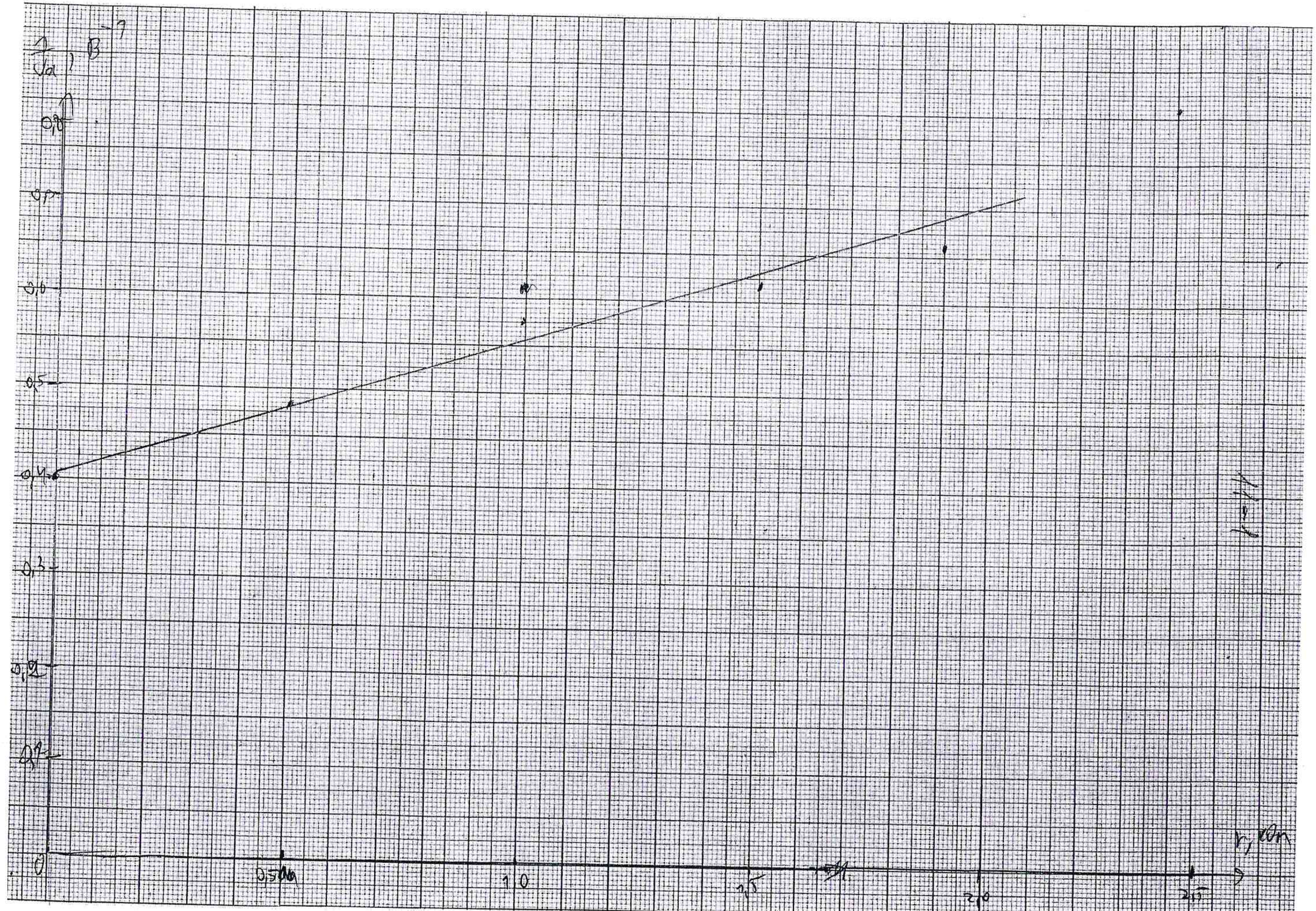
U_x, В	r, Ом	$\frac{1}{U_x}$, $В^{-1}$
1,2	2500	0,83
1,4	2000	0,71
1,6	1500	0,63
1,8	1000	0,56
2,1	500	0,48
2,5	0	0,4

см. график

не успел обработать.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,5	3	0,5	0	1	1	0	0	0	0	0

Итого баллы 7б


0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

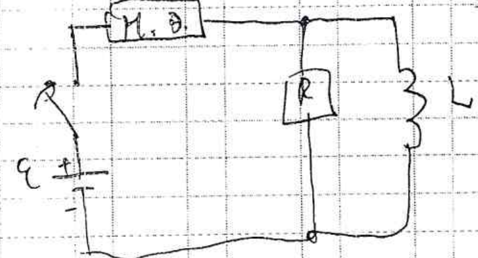
1	2	3	4
0	12	6	9

ЛИСТ 1 ИЗ 8

11-1

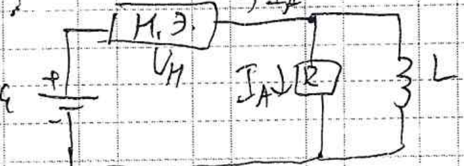
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№2, 11.2



0) Понятно, что сразу после замыкания ключа ток через катушку 0, т.к. быстро ток в ней поменяться не может, ведь $U_L = L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}$ напряжение U_L конечно, Δt - мало, значит ΔI_L ~ мало.

1) Найдём ток через Н.Э. сразу после замыкания ключа: $t=0$;



$I_A = I(0)$ - ток в момент $t=0$.

$\mathcal{E} = I_A R + U_H \Rightarrow U_H = \mathcal{E} - I_A R$

Пусть ~~нап~~ ток в цепи $I_A > I_0$, тогда $U_H > I_0 R$, тогда

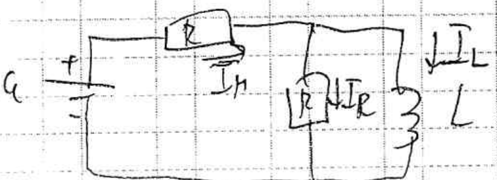
$\mathcal{E} = I_A R + U_H$ $\quad \mathcal{E} > I_0 R + I_0 R = 2 I_0 R = 2\cdot 3\cdot 5 = 30B$ #!, но $\mathcal{E} = 20$ В.

Значит в самом начале $I_A < I_0$. (20В < 30В).

~~Значит до тем~~ ясно, что до момента достижения тока в Н.Э. I_0 ($I_H < I_0$), можно заменить Н.Э. на резистор с сопротивлением R. Тогда:

$\mathcal{E} = 2 I_A R \Rightarrow I_A = \frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{20}{2\cdot 5} = 2A$

2) Рассмотрим ситуацию в промежутке времени $t \in (0, \tau]$. τ - момент достижения тока в Н.Э. до I_0, то есть рассмотрим ситуацию $I_H < I_0$. Тогда Н.Э. можно заменить на резистор R:



а) $I_H = I_R + I_L \Rightarrow I_R = I_H - I_L$

б) $\mathcal{E} = R(I_H + I_R) = R(I_H + I_H - I_L) = R(2I_H - I_L)$

Тогда $I_L = 2I_H - \frac{\mathcal{E}}{R}$

в) для „L+R": $R\cdot I_R = L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}$

$$R(I_H - I_L) = L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}$$

$$R\left(I_H - 2I_H + \frac{\mathcal{E}}{R}\right) = L\frac{\Delta\left(2I_H - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)}{\Delta t} = 2L\frac{\Delta I_H}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E} - I_H R = 2L\frac{\Delta I_H}{\Delta t}$$

$\cancel{\mathcal{E} - I_H R}$

$$\mathcal{E} - I_H R = 2L\,\frac{\Delta I_H}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E} - I_H R = 2L\,\frac{dI_H}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_{I_A}^{I} 2L \cdot \frac{dI_H}{\mathcal{E} - I_H R}$$

$$t = \frac{2L\cdot \ln(\mathcal{E} - I_H R)}{-R}\Bigg|_{I_A}^{I_H}$$

$$\frac{-tR}{2L} = \ln\frac{\mathcal{E} - I_H R}{\mathcal{E} - I_A R} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E} - I_H R}{\mathcal{E} - I_A R} = \exp\left(-\frac{tR}{2L}\right)$$

$$I_A R = \frac{\mathcal{E}}{2R}\cdot R = \frac{\mathcal{E}}{2} \Rightarrow \mathcal{E} - I_A R = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

$$\mathcal{E} - I_H R = \frac{\mathcal{E}}{2}\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right) \Leftrightarrow I_H = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right)\right)$$

Причём эта зависимость верна до момента τ. Как видим ток монотонно растёт.

$$I_H(\tau) = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\tau R}{2L}\right)\right)$$

$$\frac{I_0 R}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\tau R}{2L}\right)$$

$$\ln\left(2 - \frac{2I_0R}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{\tau R}{2L} \Leftrightarrow \tau = \frac{-2L}{R}\cdot\ln\left(2 - \frac{2I_0R}{\mathcal{E}}\right) =$$

$$= \frac{-2L}{R}\cdot\ln\left(2 - \frac{2\cdot 3\cdot 5}{20}\right) = -\frac{2L}{R}\cdot\ln(0,5)$$

2) Теперь найдём $I_R(t)$: $I_R = I_H - I_L = I_H - 2I_H + \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} - I_H$

$$I_R(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right)\right) = \frac{\mathcal{E}}{2R}\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right)$$

Тогда можно найти выделившееся тепло для $t \in (0; \tau]$:

$$\cancel{Q_1 = \int_0^\tau I_R(t)\,dt = \int_0^\tau \frac{\mathcal{E}}{2R}\cdot\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right) = \frac{\mathcal{E}}{2R}\cdot\exp\left(-\frac{tR}{2L}\right)\cdot\left(\frac{-2L}{R}\right)\Bigg|_0^\tau =}$$

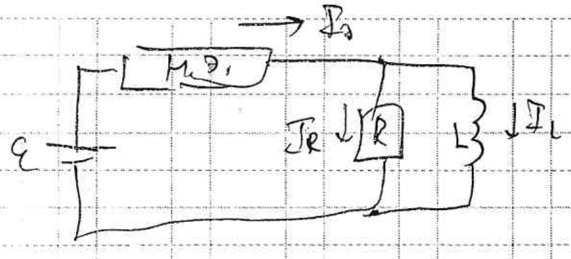
$$Q_1 = \int_0^\tau R\cdot I_R^2(t)\cdot dt = \int_0^\tau \frac{\mathcal{E}^2}{4R^2}\exp\left(-\frac{2tR}{2L}\right)\cdot R = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}\cdot\int_0^\tau \exp\left(-\frac{tR}{L}\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{4R}\cdot\exp\left(-\frac{tR}{L}\right)\cdot\left(-\frac{L}{R}\right)\Bigg|_0^\tau = \frac{-\mathcal{E}^2 L}{4R^2}\left(\exp\left(-\frac{\tau R}{L}\right) - \exp(0)\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2 L}{4R^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau R}{L}\right)\right) = \frac{\mathcal{E}^2 L}{4R^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{2L}{R}\cdot\ln(0,5)\cdot\frac{R}{L}\right)\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2 L}{4R^2}\left(1 - \exp(2\cdot\ln 0,5)\right) = \frac{\mathcal{E}^2 L}{4R^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}\cdot\frac{\mathcal{E}^2 L}{R^2}$$

3) Начиная от момента $t = \tau$ и до $+\infty$ ток через Н.Э. не будет меняться и будет оставаться постоянным. $I_H = I_0$



~~8)~~

8) $I_R \cdot R = L \cdot \frac{\Delta I_L}{\Delta t}$

$I_R \cdot R = L \cdot \frac{\Delta (I_0 - I_R)}{\Delta t}$

$I_R \cdot R = L \cdot \frac{-\Delta I_R}{\Delta t}$

$-I_R \cdot R = L \frac{dI_R}{dt}$

$-\int_{\tau}^{t} R \cdot dt = L \int_{I_R(\tau)}^{I_R} \frac{dI_R}{I_R}$

$-R(t-\tau) = L \cdot \ln \frac{I_R}{I_R(\tau)}$

$I_R(\tau) = \frac{\varepsilon}{2R} \cdot \exp\left(-\frac{R}{2L} \cdot \left(-\frac{2L}{R}\right) \cdot \ln 0{,}5\right) = \frac{\varepsilon}{2R} \cdot 0{,}5 = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{20}{4 \cdot 5} = 1A$

$\exp\left(\frac{-R(t-\tau)}{L}\right) = \frac{I_R}{I_R(\tau)} \rightarrow I_R(t) = I_R(\tau) \cdot \exp\left(\frac{-R(t-\tau)}{L}\right)$

$Q_2 = \int_{\tau}^{\infty} I_R^2 \cdot R\, dt = \int_{\tau}^{\infty} I_R^2(\tau) \cdot R \cdot \exp\left(\frac{-2R(t-\tau)}{L}\right) =$

$= -I_R^2(\tau) \cdot R \cdot \exp\left(\frac{-2R(t-\tau)}{L}\right)\left(\frac{L}{2R}\right)\Big|_{\tau}^{\infty} = -I_R^2(\tau) \cdot R \cdot \frac{L}{2R} \cdot$

$\cdot \left(\exp(-\infty) - \exp\left(-\frac{2R(\tau-\tau)}{L}\right)\right) = \frac{I_R^2(\tau) \cdot L}{2} \cdot (1-0) =$

$= \left(\frac{\varepsilon}{4R}\right)^2 \cdot \frac{L}{2} = \frac{\varepsilon^2 L}{32R^2}$

4) Тогда общее тепло: $Q = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot \frac{\varepsilon^2 L}{R^2} = \frac{7}{32} \cdot \frac{\varepsilon^2 L}{R^2} =$

$= \frac{7}{32} \cdot \frac{20^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{5^2} =$ 0,07 Вт

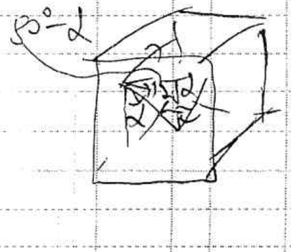
12

$\boxed{\text{№ 2. 11.3}}$

1) Заметим, что луч, который вышел из источника и упал на грань под углом α затем частично отразится и этот луч затем упадет на иную грань под углом $90^\circ - \alpha$. ⊖ затем снова под α и т.д.

$\alpha \rightarrow (90^\circ - \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow (90^\circ - \alpha) \rightarrow \dots$

если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ в одной плоскости.



2) Заметим, что если луч хотя бы частично преломляется, то есть $n \cdot \sin\beta < 1$, β — угол падения, то луч рано или поздно всю свою энергию выводит из куба. Ведь, если какая-то часть энергии выходит при данном угле падения, то через бесконечно большое число отражений вся энергия этого исходного луча выйдет.

А это означает, что если исходный луч упал под углом β, то выйдет он весь, либо весь останется внутри в силу эффекта полного отражения.

Причём луч выйдет при условии:

$n\sin\beta < 1$, либо $n \cdot \sin(90^\circ - \beta) < 1$

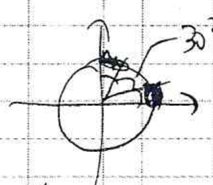
т. к. углы чередуются $\beta \to (90^\circ - \beta) \to \beta \to \ldots$

Значит условие выхода луча:

$$\begin{cases} n\sin\beta < 1 \\ n\sin(90^\circ-\beta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta < \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \beta < 30^\circ \\ \cos\beta < \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 90^\circ > \beta > 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \beta \in [0; 30^\circ) \cup (60; 90^\circ]$$

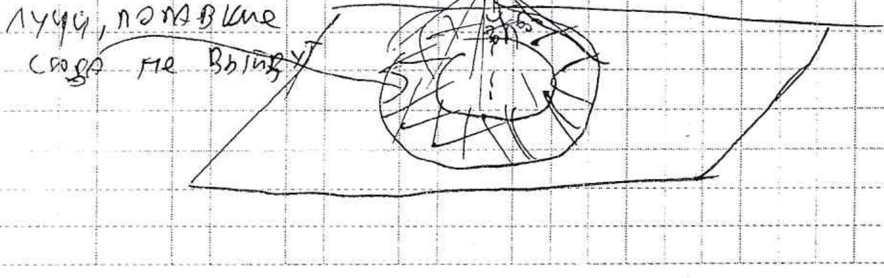
1)+2)+3)+4)+5) = 6 баллов

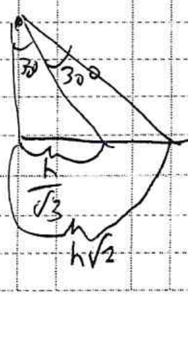
На тригонометрической окружности это выглядит так:



То есть, если узнать какая часть лучей к граням куба падает под углами от 30° до 60°, то найдём часть лучей, которые не вышли. Как раз эта часть энергии не выйдет из куба. То есть это есть $k = 1 - \eta$. Зная $(1-\eta)$, легко найти $\eta = 1 - k$.

3) То есть если источник находится на высоте h от плоскости, то часть между окружностями радиусов $\frac{h}{\sqrt{3}}$ и $h\sqrt{3}$ как раз останется внутри куба и не выйдет!





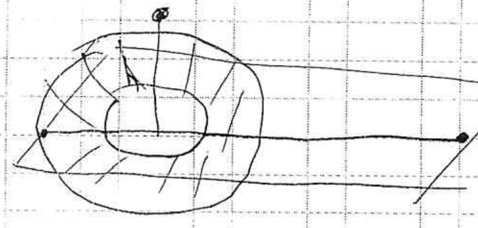
лучи, непопавшие в выделенную зону, выйдут из плоскости. Причём ~~пл~~ площадь пространства, по которой шли ~~неполавш~~ лучи, попавшие безвыходную зону, можно найти:

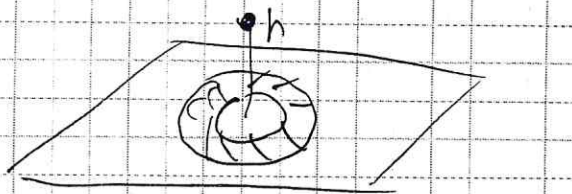
$$S = 2\pi h\left(h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi h^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi h^2 \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi h^2$$

4) Аналогично можно рассмотреть падение на грань куба, только ~~это~~ это уже ограниченный кусок плоскости. Здесь уже возможны варианты:

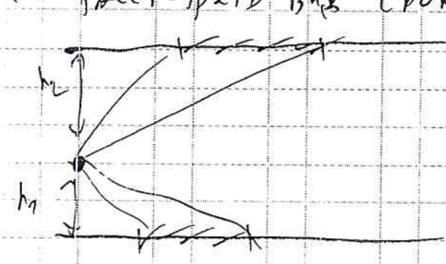
(В1) Чёрная зона выходит за пределы грани

(В2) Чёрная зона не выходит за пределы грани





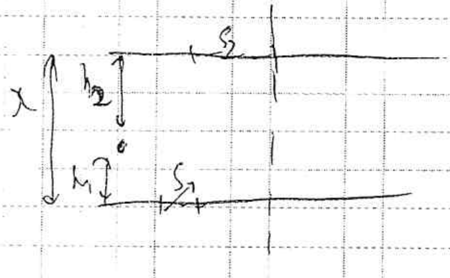
5) Если рассмотреть вид сбоку:



Заштрихованная чёрная зона — лучи, оставшиеся в кубе навсегда

6) Теперь давайте рассмотрим 2 грани. Ясно, что для ~~ма~~ максимума чёрной зоны нужно, чтобы она не выходила за пределы грани;

x — сторона куба



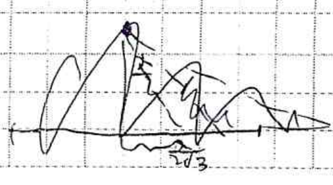
$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi h_1^2 \quad S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi h_2^2$ (т. к. половина зоны смотри)

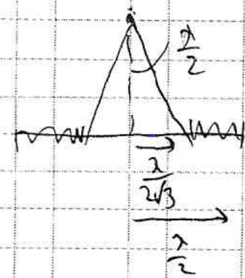
$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\left(h_1^2 + h_2^2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\left(h_1^2 + (x - h_1)^2\right)$$

Видим, что функция принимает максимум при $h_1 = \frac{x}{2}$ $\left(\left(h_1^2 + (x-h_1)^2\right)' = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{x}{2}\right)$

Значит для двух граней максимум чёрной зоны достигается в центре, значит для всех граней — в центре куба.

~~Найдём~~ для центра куба:





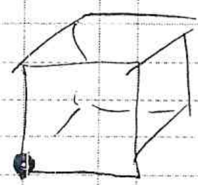
Значит площадь вышедшего для одной грани:

$$S_0 = 2\pi \cdot \frac{x}{2\sqrt3} \cdot \frac{x}{2} = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt3}$$

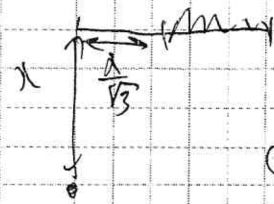
Площадь ~~части~~ пучка, идущего на грань: $S_{об} = 2\pi \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2}$

$$\eta_{min} = \frac{S_0}{S_{об}} = \frac{\pi x^2 \frac{1}{2\sqrt3}}{\pi x^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt3} \approx 0{,}14$$

2) Понятно, что максимум будет достигаться тогда в углу куба: для граней, к которым принадлежит источник пройдёт весь свет.



Найдём часть света, которая пройдёт через другие 3 грани:



Светлая часть: $S_0' = 2\pi \cdot \frac{x}{\sqrt3} \cdot x = \pi x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt3}$

Площадь общая: $S_0 = 2\pi x \cdot x = 2\pi x^2$

Тогда $\eta' = \frac{\pi x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt3}}{2\pi x^2} = \frac{1}{\sqrt3}$

Тогда для общего случая будет ср. ар. между 1 и η': $\eta_{max} = \frac{1+\eta'}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt3}}{2} = \frac{\sqrt3+1}{2\sqrt3} \approx 0{,}79$

Тогда $\eta \in [\eta_{min}; \eta_{max}]$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап 2020/2021 учебный год

ЛИСТ 7 ИЗ 8 | 11-1
ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

№ 2-11.4

1) Заметим, что в момент t между 5'23 и 5'52 масса ~~совершимого~~ резко возросла, значит в этом промежутке времени положили алюминиевый цилиндр.

t, с	m, г	Δt, с	Δm, г	$\frac{\Delta m}{\Delta t}$
0	250	49	4	0,082
49	246	43	4	0,093
92	242	33	4	0,121
125	238	36	4	0,111
161	234	41	4	0,098
202	230	44	4	0,091
246	226	44	4	0,091
290	222	33	4	0,121
323	218			

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
1 | 2 | 2 | 0,5 | 3 | 0,5
= 9

Заметим, что до того как положили Al (цилиндр) азот испарялся из-за теплообмена с окр. средой, причём скорость испарения зависит от площади поверхности, от мощности испарения, оно т.е. в данном случае всё постоянно.

$N = \alpha(t_A - t_0)$ – закон Ньютона – Рихмана (подводящая мощность из-за теплообмена)

Тогда $N\Delta\tau = \Delta m \cdot \beta$ β – количество теплоты, которое необходимо подвести для испарения 1кг жидкости в данной задаче (не кипение)

$\alpha(t_A - t_0)\Delta\tau = \Delta m\beta$

$\Downarrow$

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{\alpha(t_A - t_0)}{\beta} = const, \text{ т.к. } t_0 = 23°C \quad t_A = -196°C$$
α, β – константы

Как видим график $m(\tau)$ должен быть линейным. Приблизительно это и наблюдается (см. таблицу) (изменения можно считать почти малыми)

Нарисуем остаток таблицы:

τ, с	m, г	$\Delta\tau$, с	Δm, г	$\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$, $\frac{г}{с}$
352	274	15	10	0,667
367	264	23	10	0,435
390	254	24	10	0,417
414	244	31	12	0,387
445	232	23	3	0,130
468	228	32	5	0,156
500	224	29	5	0,172
529	218	44	4	0,091
573	215	42	4	0,095
615	211	40	4	0,100
655	207	42	4	0,095

ЛИСТ 8 ИЗ 8	11-1 ШИФР (заполняется Оргкомитетом)

τ, с	m, г	Δτ, с	Δm, г	$\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$, г/с
697	203	43	4	0,093
740	199	45	4	0,089
785	195			

2) Чтобы найти λ нужно рассмотреть время с момента добавления цилиндра в контейнер до момента выравнивания его с температурой окр. среды. Тогда:

$m_A \cdot \lambda \approx Q_{A1}$. Т.к. время теплообмена мало, то можно пренебречь за это время теплом из окр. среды в контейнер. В полном же виде зависимость имеет вид:

$m_A \cdot \lambda \approx Q_{A1} + Q_{окр}$ $Q_{окр} \approx \alpha (t_A - t_0) \cdot \Delta\tau$

3) Найдём Q_{A1}. У него ~~...~~ температура меняется от 23°С до −196°С, т.е. 296°К до 77°К.

За малое изменение температуры Δt: $\Delta Q_{A1} = c_{A1} \cdot \Delta t \cdot m_{A1}$.

Тогда $Q_{A1} = \sum \Delta Q_{A1} = \sum c_{A1} \cdot \Delta t \cdot m_{A1} = m_{A1} \cdot \sum c_{A1} \cdot \Delta t$

$\sum c_{A1} \cdot \Delta t$ — площадь под графиком зависимости $c_{A1}(t)$ в пределах от 77°K до 296°K.

Найдём по клеточкам приближённое значение $\frac{Q_{A1}}{m_{A1}}$, используя формулу

$S =$ целые клетки $\cdot S_{кл} + \frac{\text{нецелые клетки}}{2} \cdot S_{кл}$

Видим, что $S_{кл} = 50 \frac{Дж}{кг \cdot К} \cdot 10°К = 500 \frac{Дж}{кг}$

число целых клеток $= 13 \cdot 20 + 41 \approx 301$

число нецелых ≈ 30

$\frac{Q_{A1}}{m_{A1}} = \left(\frac{30}{2} + 301\right) \cdot S_{кл} = 316 \cdot 500 \frac{Дж}{кг} \approx 158000 \frac{Дж}{кг}$

⇓

$Q_{A1} = \frac{Q_{A1}}{m_{A1}} \cdot m_{A1} = 158000 \cdot 69 \cdot 10^{-3} \approx 10,9$ кДж

4) Тогда раз $\Delta m_A \approx 40$ г (из таблицы, видим значение в τ ≈ 7:25), ⇒ $\lambda \approx \frac{Q_{A1}}{\Delta m_{A1}} = \frac{10900}{40 \cdot 10^{-3}} = 273 \frac{кДж}{кг}$

более точно можно было найти через интерполяцию/экстраполяцию графика, но я не успел.