№1. +

Можно. Пример

16 1 1 1 1 1 2. произв. 32.

13 −2 −2 −2 −2 −2 −1 произв. 32·13

№2.

~~Пуст~~

Пусть Петя выставил ладьи и Вася указал нечетное число ладей, стоящих на задуманных клетках. Т.к. ни одна ладья не бьет другую, а ладей всего 8, то в каждой строке и в каждом столбце ровно по одной ладье. Тогда найдутся 2 ладьи, одна из которых стоит в задуманной клетке, а другая нет. На следующий ход Петя может поставить все ладьи, кроме этих двух на прежние места. Эти ладьи оставить в тех же столбцах но поменять строки. !!

В ~~том~~ тех столбце, где ~~стояла~~ и строке ладья стояла на задуманной клетке, больше задуманных клеток быть не может, а значит, обе перемещенные ладьи встали не на задуманную клетку, значит, кол-во ладей стоящих на задум. клетках уменьшилось на 1 и стало четным. Петя выиграл за 2 хода. Если Петя угадал сразу, то выиграл за 1 ход. Очевидно, что Петя не может ~~за~~ гарантир. выиграть за 1 ход. Ответ: за 2 хода.

~~Пусть~~ №3. +

Пусть $P(x)$ – задуманный многочлен.

т.к. все коэфф целые, числа $n_1; n_2 \ldots n_k$ – целые, то и $P(n_1), P(n_2) \ldots P(n_k)$ – целые числа.

Допустим $k \leq 2016$, тогда:

$P_1(x) = (x-n_1)(x-n_2) \cdot \ldots \cdot (x-n_k)$ – многочлен $\leq$ 2016 степени принимает значение 0 при всех x от n_1 до n_k, тогда:

$P_2(x) = P(x) + P_1(x)$ – многочлен 2017 степен. ~~при всех x от n_1 до n_k принимает~~

$P_2(n_i) = P(n_i)$ при $i \in [1; k]$ $\Rightarrow$

!! $\Rightarrow$ наименьшее такое $k \geq 2017$.

~~Пусть ученик нашел некоторые значения $P(n_i)$, ~~такие, что~~ удовлетворяющие условию, про произведение. Обозначим их P_i ~~и нашел некот. многочлен~~~~

~~тогда что~~ $P(n_k)$

тогда если у четного числа значений $P(n_i)$ поменять знак, то произв. не изменится.

~~Пусть $k = 2017$~~. тогда получим совокупность неск. миллионов двух систем вида:

$$\begin{cases} P(n_1) = P_1 \\ P(n_2) = P_2 \\ \ldots \\ P(n_k) = P_k \end{cases}$$

это система k линейных уравнений с 2017 неизвестными. при $k = 2017$ эта система имеет ровно одно решение.

а. т. к. имеем совокупность нескольких нетожд. систем, то решений больше 1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ наименьшее $k \geq 2018$.

Если произведение значений многочлена будет равно 1, то каждое из значений будет равно ± 1.

Если ~~заданный многочлен будет иметь~~ 0 отрицательных будет четное, а положит. нечет. (хотя бы один)

уравнение $P(x) = 1$ будет иметь 2017 целых корней, а $P(x) = -1$ — ни одного (целого) то по этим целым корням и произведению значений (1) возможно будет определить $P(x)$ единственным образом

~~наименьшее $k = 2017$~~.

Наименьшее значение $k = 2017$.

№5.

~~[illegible]~~.

Произведение двух чисел может быть рационально только если оба числа рациональные или оба числа иррациональные. !

таким образом можно получиться $25 \cdot 25$ рац. Нет.

чисел при умножении двух рац. и $25 \cdot 25$ рац.

чисел при умножении двух иррац. всего

$25 \cdot 50 = 1250$ рац. чисел

пример: 25 иррац. чисел над столбцами

вида $\frac{\sqrt{2}}{n}$, $n \in [1; 25]$, $n \in N$, каждое n использ. один раз, и 25 рациональных чисел над столбцами слева от строк 25 иррац. чисел

вида $\frac{\sqrt{2}}{m}$, $m \in [26; 50]$ $m \in N$, каждое m используется один раз и 25 рациональных чисел над столбцами

№8.

изначально на карточках 72 четных и 27 нечет. числа. обозначим сумму всех произведений, в которых участвуют четные числа как $2^k(2n-1)$. (она, очевидно, четна).

$k, n \in N$.

Пусть $2^k(2n-1)$ – сумма всех четных произведений (когда кол-во нечетных чисел равно 32) в некоторый момент. $2^l(2m-1)$ – сумма всех нечетных произведений в этот момент. $n \in N$, $m \in N$

$2^k(2n-1)+2^l(2m-1) = 2^k(2n-1+2^{l-k}(2m-1))$ (~~если $l \geq k$~~)

(если $k > l$, то поменяем их местами.)

~~если~~ $l > k \Rightarrow (2n-1+2^{l-k}(2m-1))$ – нечетн. число, тогда $2^k(2n-1+2^{l-k}(2m-1))$ заменим на $2^p(2u-1)$ $p, u \in N$ $(p=k)$.

$l = k. \Rightarrow (2n-1+2^{l-k}(2m-1))$ – четное, тогда вынесем все двойки и заменим $2^k(2n-1+2^{l-k}(2m-1))$ на $2^p(2u-1)$ $p, u \in N$ $(p>k)$.

$2^p(2u-1)$ – ~~новое~~ число на новой карточке, тогда новая сумма всех произведений будет равна ~~старой~~ сумме "старой суммы" (новое число) и всех произведений, в которых участвует новое число.

рассмотрим все произведения, в которых участвует новое число и еще хотя бы одно четное. их сумма имеет вид $2^{p+1}(2u-1)\cdot b$?, $b \in N$, теперь рассмотрим все произведения в которых участвует новое число, а все остальные – нечетны. их количество: $\dfrac{32!}{11!\,21!} = \dfrac{32!}{12!\,20!} \cdot \dfrac{12}{21}$ – чётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма всех таких произведений имеет вид $2^{p+1}(2u-1)\cdot c$?, $c \in N$

Общая сумма всех произведений

$$2^p(2u-1) + 2^{p+1}(2u-1)(c+b) = 2^p\big(2u-1+2(2u-1)(c+b)\big) =$$

$$= 2^p\big(2\big((2u-1)(c+b)+u\big)-1\big) = 2^p(2x-1),\quad x \in N$$

Это новое число. оно делится на 2 только в той же степени, на 2 в которой делится предыдущее добавленное, а это значит, что не появятся карточки с числом делящимся на 2^d для любого d.