Задача 1

Ответ: можно

Решение: заметим, что для любого сомножителя $n \geq 4$ при уменьшении его на 3 произведение уменьшается (т.к. уменьшается множитель). Если хоть один из сомножителей $n = 3$, то всё произведение обратится в ноль. Наконец, если $n = 1$ или $n = 2$, то во втором произведении они будут отрицательны, причём $n = 1$ увеличится по модулю, что нам и надо. Значит, сомножителей $1 \leq n \leq 2$ будет чётное число.

Имеем первое произведение, равное Q, и второе $Q' = 13Q$. Заметим, что $13 = 16 - 3$, а $16 = 2^4$. Значит, с помощью четырёх $n = 1$ и одного $n = 16$ можно добиться желаемого результата: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16 = 16$, $(1-3)(1-3)(1-3)(1-3)(16-3) = 16 \cdot 13$. Чтобы сомножителей было 7, необходимо добавить ещё 2. Эти два n не больше 2, т.к иначе произведение Q' уменьшится. Даже если одно n 2 или 1, другое тоже не больше двух, так как тогда Q' будет отрицательном. Если оба n будут равны 1, то Q' увеличится по сравнению с Q в 4 раза; если оба $n=2$, то Q будет больше Q' ещё в 4 раза. Однако если $n_1=1$, $n_2=2$, то произведение Q' будет положительно, и Q', и Q увеличатся в 2 раза, а значит, равенство $Q'=13Q$ сохранится!

$$Q=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot16=32$$

$$Q'=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-1)\cdot13=13\cdot32=13Q$$

Задача 2

Почему?

Очевидно, что за один ход победа Пети ~~не~~ возможна, но не гарантирована, так как у него нет никакой информации о положении загаданных клеток. Покажем, что за 2 хода Петя гарантированно выигрывает.

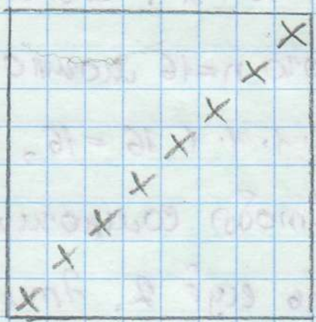


рис. 1

Далее на рисунках крестиками обозначим постановку ладей в ход Пети, обведёнными — ладей, которые попали на загаданные клетки.

Первым ходом Петя располагает ладей по любой главной диагонали (рис 1). Если ладьи попали на чётное кол-во загаданных клеток, то

рис. 2

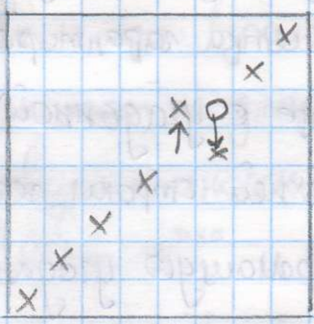


рис. 3

Петя выигрывает. Если на нечётное:

1) Только 1 ладья попала на загаданную клетку

У любой клетки диагонали есть хотя бы 2 соседние. Они, очевидно, будут гарантированно пустые, находясь в 1 строке и в 1 столбце с загаданной. ~~Т~~ Тогда Пете требуется в них поставить 2 ладьи: ту, которая попала в загаданную клетку, и соседнюю по диагонали. Если переместить только попавшую в загаданную клетку, то 2 ладьи будут бить друг друга. А при перестановке 2 ладей ни одна из них не будет бить другие и все ладьи будут стоять на незагаданных клетках, что означает выигрыш Пети (пример для угловой и иной клетки на рис 2 и рис. 3)

2) На загаданные клетки попали 3(5;7) ладьи.

При таком положении нам известно, что все строки и все столбцы, содержащие угаданные клетки, пусты.

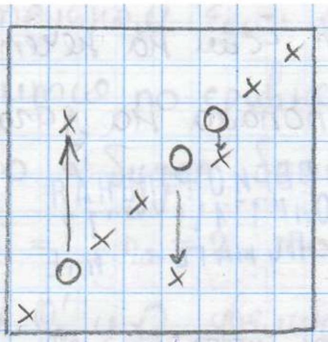


рис 4

Заметим, что и столбцов, и строк будет ровно столько, сколько угаданных клеток. Тогда возможно циклично переместить каждую ладью в следующую строку, содержащую угаданную клетку (новая занятая клетка гарантированно пустая, т.к. лежит в 1 столбце с угаданной). Таким образом, из каждой более верхней строки перемещаем ладью в более нижнюю, содержащую угаданную клетку; из нижней строки переносим ладью по столбцу в верхнюю, содержащую угаданную клетку. Получается, на втором ходу у Пети снова все ладьи стоят на пустых клетках, и он выигрывает (рис 4)

Ответ: за 2 хода

Задача 3

Для решения задачи удобно проще всего задать простейший многочлен вида $x^{2017} + m_1 x^{2016} + \ldots + m_{2017}$, где все $m_i = 0$ ($i \in \{1; \ldots; 2017\}$). Тогда $P(x) = x^{2017}$.

Если взять $k = 1$, то при любом n будет неоднозначность в выборе $m_1 \ldots m_{2017}$. Например,

$P(2) = 2^{2017}$ соответствует многочлену $P_1(x) = x^{2017} + x^{2016} - x^{2015} - x^{2014} - \ldots - x - 2$. Так же с остальными целыми n_1 (коэф. другие, суть та же)

При $k=2$ при $n_1, n_2 \geq 2$ неоднозначность очевидна: $P(2) \cdot P(4) = 2^{2017 \cdot 3}$ соответствует тому же $P_1(x)$, как и при взаимно простых n_1 и n_2. При $n_1 = 1$ также возникает неоднозначность: $P(1) \cdot P(2) = 2^{2017}$ соответствует многочлену $P_2(x) = x^{2017} - 3 \cdot x^{2016}$, где $P_2(1) = -2$, $P_2(2) = -2^{2016}$ и $P(1) P(2) = 2^{2017}$. Аналогично с парой $n_1 = -1$, $n_2 = 2$. Пара $n_1 = 1$; $n_2 = -1$ вносит ещё больше неоднозначности ($P_3(x) = x^{2017} - 2x^3$)

$\varphi(x) = x^{2017} + (x+2)(x-2)(x-1)$

Покажем, что для $P(x) = x^{2017}$ и $k=3$ можно подобрать n_1, n_2 и n_3 так, чтобы $P(x)$ определялся однозначно.

тоже подходит

Пусть $n_1 = 2$; $n_2 = -2$; $n_3 = 1$. Тогда $P(1) \cdot P(2) \cdot P(-2) = -2^{4034}$. Мы однозначно знаем, что $P(1) = 1 + c_1$, $P(-2) = -2^{2017} + c_2$, $P(2) = 2^{2017} + c_3$. Допустим, $P(2) = \pm 1$. Тогда произведение $P(1) \cdot P(-2)$ должно делиться на 2. Однако чётность выражений $P(2)$ и $P(-2)$ совпадает, значит, $P(1)$ должно быть кратно 2. Если $P(2)$ нечётно, то и m_{2017} нечётно, значит, раз $P(1)$ чётно, то $m_1 + \ldots + m_{2016}$

тоже чётно. В произв. $P(2)P(-2)P(1) = 2^{2017}$ нет больше

неч. делителей, кроме ± 1, значит, $P(1) = \pm 2^{2017}$, что

не соотв. $P(2) = \pm 1$ (при попытке подставить в $P(x)$ 2 выходит больше или меньше 1 и -1 соотв.)

Иные способы представления иного многочлена $P(x)$

невозможны, т.к. сумма коэф. при кот. $P(2) = \pm 2^n$ и

$P(-2) = \pm 2^{2017-n}$ не равна $P(1) = \pm 1$, и решение единственно

Ответ: $k = 3$

Задача 1 (5)

	n (р)	$50-n$ (и)
$50-n$ (р)	1	2
n (и)	3	4

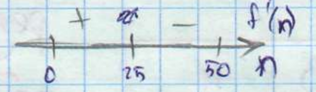
Заметим, что результат произведения рационального и иррационального числа иррационален, тогда как произведение иррациональных чисел может быть рационально ($2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$).

Пусть над столбцами написано n рациональных чисел ($n \le 50$). Тогда иррациональных над столбцами $50-n$. Порядок значения не имеет, так как существенно только числа рациональных и иррациональных чисел слева от строк, равные соответственно $50-n$ и n чисел. Поэтому сгруппируем числа так, как показано на рисунке (р – рациональное, и – иррациональное число). Тогда в областях 2 и 3 однозначно будут иррациональные произведения, в области 1 – рациональные, а в области 4 могут все числа быть рациональными (если, например, все иррациональные выписанные Олегом числа вида $k \cdot \sqrt{2}$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$). Тогда максимальное количество рациональных чисел в таблице $(50-n) \cdot 2n$

Запишем функцию этого кол-ва и найдём её максимум на промежутке [0; 50]:

$f(n) = 2n(50-n) \qquad f(n) = 100n - 2n^2$

$f'(n) = 100 - 4n \qquad n = 25$ кр. точка

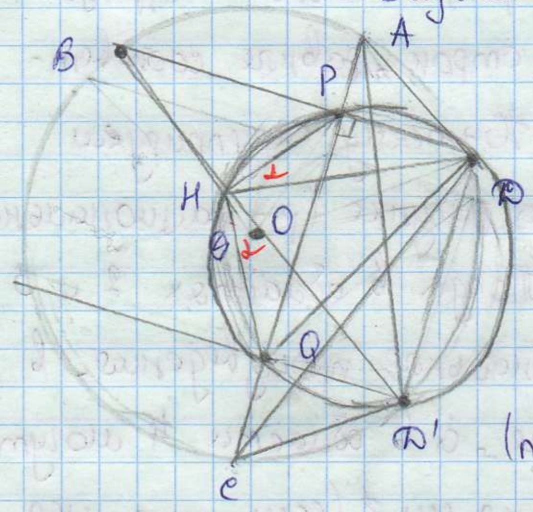


Выходит, $f(n)$ возрастает до $n = 25$ и после только убывает. Значит, в $n = 25$ достигается максимум $f(n)$ и функция принимает максимальное значение:

$f(25) = 50(50-25) = 1250$

Ответ: 1250 рациональных чисел.

Задача 2 (б)



$\angle DPC = 90°$ (по усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow QD$ – диаметр ω

(по св. впис. уг. $90°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QHD = 90°$ (по св-ву впис. углов), $\angle BHP = 90° \Rightarrow \angle PHO = 90°$ (по св-ву смежных углов).

$\angle OHD + \angle QHO = \angle OHD + \angle DHP = 90° \Rightarrow \angle QHO = \angle DHP = \alpha$

Пусть $HO \cap \omega = D'$. Тогда $PD = QD'$ (по св-ву впис. уг.), QD – общая; $\angle D'HD = 90° + \alpha$, $\angle QHP =$

$= 90^\circ + \alpha \Rightarrow \angle D'HD + \angle QHP = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = DD'$ (по св-ву впис. уг.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PDQ = \triangle D'QD$ (по III пр. равенства треугол.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDD' = \angle QPD = 90^\circ$ (как соотв. эл. равн. треуг.) $\Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow$ в окр Γ BD' проходит через O, $\angle BDD' = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BD'$ – диаметр Γ (по приз. диам. из св-ва впис. пря-мого угла) $\Rightarrow D' \in \Gamma$.

$\angle PQD = \angle QDD$, (по св. впис. уг. и как эл. равн. тр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow DD' \parallel PQ$ (по пр. парал. прямых по прилеж. углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QPD + \angle PDD' = 180^\circ$ (по св-ву углов, прилеж. к парал. прямым) $\Rightarrow \angle PDD' = 90^\circ \Rightarrow$ (1)

$\angle CAD' = \angle AD'D$ (как внутр. накрест леж. углы при пере-сечении парал. пр. AC и DD' сек. AD') $\Rightarrow AD = CD'$ (по св-ву впис. углов), ~~в $\triangle ACD'$ и CAD AC общая, $\angle CD'A = \angle CDA$ (как опир. на одну хорду AC), $\angle CAD' = \angle ACD$ (как опир. на равные хорды) $\Rightarrow \angle ACD' = \angle DAC$ (по св-ву суммы углов треуг.) $\Rightarrow AD' = CD$ (по св-ву впис. углов) $\Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ в $\triangle APD$ и $\triangle CQD'$ ~~EPAD = E~~ $\angle CQD' = 180^\circ - \angle PQD' =$
$= 180^\circ - (360^\circ - 3 \cdot 90^\circ) = 90^\circ = \angle APD$, $PD = QD'$, $AD = CD' \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APD = \triangle CQD'$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow CQ = AP$

(как соотв. элементы равных треуг.), ч и т.д.

Задача 3 (7)

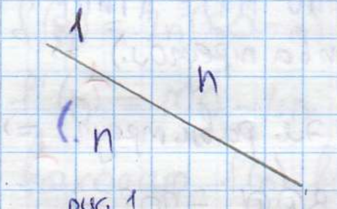


рис 1

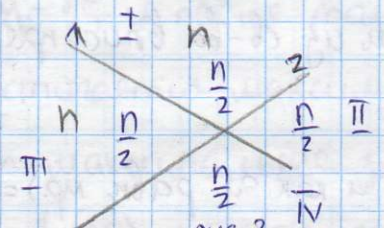


рис 2

рис 3

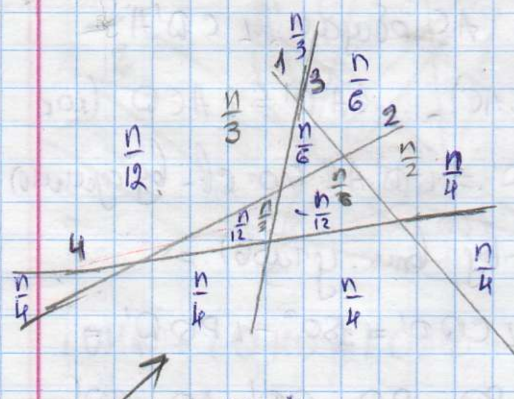


рис 4

Рассмотрим постепенное увеличение числа прямых от 1 до ~~n~~ k. Пусть по обе стороны от прямой 1 находятся числа n. Когда мы проведем прямую 2, непараллельную прямой 1, она (под номером i) разобьет i областей. Их станет 4. Представим, что по одну сторону от прямой 2 нет разбитых областей прямой 1, в которых есть числа. Очевидно, сумма по одну сторону будет 0, по другую 2n; всего сумма по обе стороны должна быть $(0+2n):2=n$. Тогда от каждой области

недопустимо (в одной области отриц. число.

нам нужно перенести $n:2=\frac{n}{2}$ (2 здесь кол-во лишних "пустых областей) ~~в~~ в "пустые области так, чтобы из одной части "разбитой" области $\frac{n}{2}$ перенеслось в другую (из I в II и из III в IV). Сумма снова равна

При добавлении прямой 3, разделившей 3 области из 4, снова создаём "пустые области. Сумма по обе стороны от прямой 3 должна быть $\frac{4\cdot\frac{n}{2}+0}{2}=n$, поэтому от каждой соседней с "пустой" областью необходимо переправить $\frac{n}{3}$. Тогда в ней останется $\frac{n}{2}-\frac{n}{3}=\frac{n}{6}$.

Аналогично с 4, 5 и т.д. до k прямых: при добавлении новой прямой создаём по одну сторону от неё "пустые" области, считаем, сколько необходимо переправить в них из соседних, и переправляем, сохраняя постоянные суммы по обе стороны отн. любой прямой. ~~Пусть по сторону пусты~~ Также заметим, что сумма по обе стороны от любой прямой равна n (~~все об~~ сумма всех областей на

а если переправлять потребуется больше, чем есть?

меняется и равна $2n$, т.к. мы ничего не вычитаем и не прибавляем). Поэтому каждый раз нам понадобится заполнить "пустую" область числом $\frac{(n-p)}{i}$, где p — число, стоящее по ту же сторону, что и "пустые" части разделённых областей, в нетронутой области, а i — номер добавляемой прямой. Таким образом мы добиваемся, чтобы по эту сторону было $p+\frac{n-p}{i}\cdot i=n$, а по другую останется $2n-n=n$, при этом сохраняя равенство сумм по обе стороны от уже имеющихся прямых, т.к. мы переставляем числа только через i-тую прямую, держа их на ~~одной~~ той же стороне от остальных, на которой они были. Очень важно верно выбрать первую прямую, во избежание появления отрицательных и неположительных чисел (необходимо, чтобы при каждой новой прямой по обе стороны от неё были нетронутые области, возможно, равное их кол-во)

Задача 4(8)

Заметим, что ~~при~~ в первую минуту число нечётных произведений $\frac{28!}{12!\,16!}$ будет нечётно, ~~в~~ равно как и во вторую, третью и четвёртую, когда число нечётных карточек будет 29, 30 и 31 (ведь если в сумме произведений будет нечётное число нечётных, то и вся сумма будет нечётна). Однако после n_{105} все остальные добавляющиеся карточки будут чётными, а сумма нечётных произведений будет постоянна.