

класс

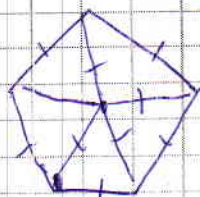
Шифр

2018-11-15

1	2	3	4	5	Σ
4	4	4	4	4	20
7	7	0	1	0	15

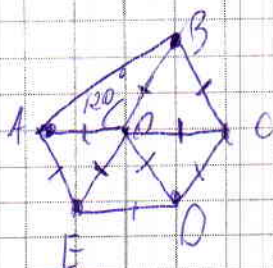
№ 1.

Для начала проверим, что все десять отрезков не могут иметь длину 1. Действительно, если все они имеют длину 1, то они все равны между собой. Тогда пятиугольник состоит из 5 равносторонних треугольников. Но угол при вершине правильного треугольника 60° . Тогда сумма углов в пятиугольнике $60^\circ \cdot 2 \cdot 5 = 600^\circ$. Но сумма углов в



n -угольнике рассчитывается по формуле $(n-2) \cdot 180$. Но есть для 5-угольника она должна быть равна 540° . Получили противоречие.

Теперь рассмотрим пример, в котором 9 отрезков равны 1. Построим рассмотрим $\triangle AOB$, $1 = AO = OB$, $\angle AOB = 120^\circ$.



От сторон AO и OB отложим равносторонние $\triangle AOC$ и $\triangle AOE$.

От ^{отрезков} сторон OC и OE также отложим равносторонние $\triangle EOD$ и $\triangle EOD'$.

Теперь заметим, что стороны в построенном $\triangle$ равны 1. $D = D'$, т.к. $OD = OD' = 1$, $\angle EOD + \angle AOE + \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 360^\circ$. 9 сторон отрезков имеют длину 1 (все кроме AB).

Осталось показать, что построенная фигура выпуклая. $\angle ABO = \angle OAB$ (в $\triangle ABO$) $\Rightarrow \angle ABO = \angle OAB = \frac{180-120}{2}$

$$\angle EAB = \angle BAO + \angle OAE = 90^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 90^\circ$$

$\angle EDC = \angle DCB = \angle AED = 2 \cdot 60^\circ$ (по построению, в равност. $\triangle$ все углы 60°)
Все углы $< 180^\circ \Rightarrow ABODE$ - выпуклый. Ответ: 9

№ 2. Рассмотрим любые два столбца

Пусть в первом - n единиц, а во втором - m .
Пусть k - количество строк, в которых в обоих столбцах стоят единицы.

Тогда кол-во строк, в которых в первом столбце стоит 1, а во втором 0 равно $n - k$.

А кол-во строк, в которых в первом столбце стоит 0, а во втором 1 равно $m - k$.

Кол-во строк, в которых в обоих столбцах стоят нули $1001 - (n - k) - (m - k)$.

Нужно доказать нер-во.

$$1001 - (n - k) - (m - k) > k$$

$$1001 + k > n + m$$

$$k \geq 0.$$

$$1001 > n + m \quad \text{т.к.} \quad n \leq 500, m \leq 500, n + m \leq 1000$$

Поэтому утверждение выполняется для 2 любых столбцов $\Rightarrow$ для любых двух строк тоже выполняется.

№ 4.

Рассмотрим выражение $x^2 + xy + y^2$.

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Это выражение равно 0 тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Все ненулевые числа не равны 0, следовательно на доске никогда не появятся числа. Если в какой-то момент все пришло к нулю, то далее все числа на доске будут нулевыми.

Пусть такое возможно. Тогда рассмотрим первую
полюсу, когда все числа стали различными
расположим полюсы от этого.

Пусть, не упрощая общности, $x \in \mathbb{Q}$, $y, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
где $\mathbb{R}$ - вещественные,
 $\mathbb{Q}$ - рациональные

Тогда:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + y(x+y) \in \mathbb{Q}$$

Пусть $\frac{x}{z} = a, \frac{y}{z} = b.$

Если $\frac{x^2 + xz + z^2}{y^2 + yz + z^2} \in \mathbb{Q}$ (и это так, т.к. $x^2 + xz + z^2 \in \mathbb{Q}$, $y^2 + yz + z^2 > 0$)

то $\frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1} \in \mathbb{Q}$

и $x^2 + xy + y^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow z^2(a^2 + ab + b^2) \in \mathbb{Q}$

класс

Шифр II-2018-11-15

№ 6.

Пусть $n = dk, k \geq 1$

Тогда $n-1 = dk-1 \geq d(k-1), m.k. d \geq 1$

Тогда ~~есть~~ в интервале $[0, n-1]$ есть $\text{mod } d(k-1)$

Тогда есть $\frac{d(k-1)}{n-d(k-1)} = \frac{d(k-1)}{dk-dk+d} =$

6	7	8	9	10	Σ
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	

№ 6.

Пусть $n = dk, k \geq 1$

Тогда ~~$n-1 \geq$~~ $n-1 = dk-1 \geq (d-1)k, m.k. d \geq 1$

Тогда в интервале $[0, n-1]$ есть $\text{mod } (d-1)k$

Тогда есть $\frac{(d-1)k}{n-(d-1)k} = \frac{(d-1)k}{dk-dk+k} = d-1$

ч.м.г.

№ 7.

Пусть $x=0, y=2a$, где a - какая-то константа,

$$f(0) + f(2a) = 2f(a)f(-a)$$

Теперь пусть $x=0, y=-2a$, где a - та же константа.

$$f(0) + f(-2a) = 2f(a)f(-a)$$

Тогда

$$f(2a) - f(-2a) = 2f(a)f(-a) - 2f(a)f(-a) = 0$$

то есть $f(2a) = f(-2a)$, при $\forall a$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$, при $a = \frac{t}{2}$

$$f(2a) = f(-2a) \Leftrightarrow f(t) = f(-t)$$

ч.м.г.

11.8

Возьмём 2^k так, чтобы $2^k > 10^{2018}$

Найдём простое p_i такое, что $p_i > 2^k > p_{i-1}$

Очевидно такое найдётся, потому что простых чисел бесконечно много, ни одно из них не может быть равно 2^k , при $k > 1$.

Теперь рассмотрим $n = p_i$

Тогда $S = p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}$

Если S не кратно p_i , то $\text{НОД}(p_i, S) = 1$, тогда мы нашли такое n .

Иначе $S = m \cdot p_i$

Тогда рассмотрим $n' = p_{i+1}$.

Тогда $S' = p_1 + \dots + p_i = S + p_i = (m+1)p_i$

Если S' не кратно p_{i+1} , то $\text{НОД}(p_{i+1}, S') = 1$.

Иначе $S' = p_i(m+1) = p_i p_{i+1} X$. (П.к. $\text{НОД}(p_i, p_{i+1}) = 1$)

Тогда $S' \geq p_i p_{i+1}$

$$p_1 + \dots + p_i + p_{i+1} \geq p_i p_{i+1}$$

$$p_1 + \dots + p_{i-1} \geq p_i(p_{i+1} - 1)$$

(сумма
маленьких)

$$p_{i+1} > p_i > 2^k$$

$$p_i \geq 2^{k+1}$$

$$p_{i+1} \geq 2^{k+2}$$

$$p_i(p_{i+1} - 1) \geq (2^{k+1})(2^{k+2} - 1)$$

$$p_1 + \dots + p_{i-1} \leq 1 + 2 + 3 + \dots + 2^k = \frac{(2^{k+1} - 1)2^k}{2}$$

$$(2^{k+1})(2^{k+2} - 1) > \frac{(2^{k+1} - 1)2^k}{2}$$

$$\text{П.к. } 2^k \cdot 2 + 4 > 2^k$$

но если $p_i(p_{i+1} - 1) > p_1 + \dots + p_{i-1} \geq p_i(p_{i+1} - 1)$
Получим противоречие, следовательно наш n найден.

№ 9.

Пусть дети будут вершинами в нашей графе,
а рёбра будут обозначать дружбу.

Тогда нам нужно найти наименьшее возмож-
ное кол-во рёбер.

Заметим, что степень каждой вершины ≥ 3 .

Иначе для вершины v , степени которой < 3 ,
можно выделить одного друга, и тогда
вершине v не надо будет посылать ни в какую
тройку, ведь у неё будет < 2 друзей среди
оставшихся вершин.

Тогда оценим снизу кол-во рёбер.

Обозначим его S . $f(v)$ — ~~кол-во~~ степень вершины v .

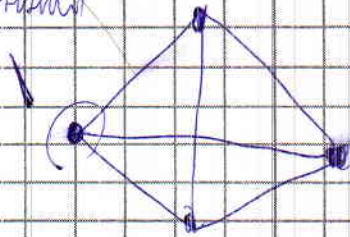
$$S = \frac{\sum_{i=1}^{100} f(v_i)}{2} \geq \frac{3 \cdot 100}{2} = 150 \text{ мало}$$

Теперь приведём пример, где это выполняется.
Разобьём 100 вершин в группы по 4, и
внутри каждой группы проведём все рёбра.

Пример на 128

33 вершины разбиты на группы по 3,
и проведём  в этих группах все рёбра. Затем
оставшуюся вершину соединим со всеми остальными.
Тогда при удалении этой вершины все остальные
разобьются на группы по 3 (по построению,
а при удалении одной вершины из группы по 3

удаления



из этого графа

Из оставшихся вершин и ребер графа можно составить предложение.

Оставшиеся вершины разобьются в предложения по-старому.

только пример.