№1.

Пусть I-ое число – x, II-ое число – y, III-ье число – z.

Тогда по условию:

$xyz + 2016 = (x-3)(y-3)(z-3)$

~~$xyz + 2016 = (xy - 3x - 3y + 9)(z-3)$~~

$xyz + 2016 = xyz - 3xz - 3yz + 9z - 3xy + \cancel{9x + 9x - 27}$

При $x = 1, y = 1, z = 676$. Это правда, т.к.

$676 + 2016 = 4 \cdot 673 = 2692$

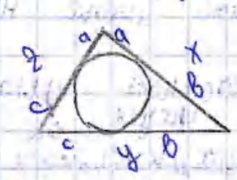
Ответ: да, может.

№3.

Пускай существует. Тогда поскольку в каждый треугольник можно вписать окружность, то

$x = a + b$

$y = b + c$



$z = c + a$; $a, b, c > 0$. Т.о.

$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x) \iff$

$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 = (a+2b+c)(b+2c+a)(c+2b+a)$

$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a + 3ab^2 + 3bc^2 + 3ca^2 =$

$= (a+2b+c)(b+2c+a)(c+2b+a)$

a^2b
$2a^2b$
$4a^2b$

$(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b) =$

$= 2a^3+2b^3+2c^3+16abc+7a^2b+7b^2c+7c^2a+7ab^2+7bc^2+7ca^2$

$= 2a^3+2b^3+2c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ac^2 =$

$= 2a^3+2b^3+2c^3+16abc+7a^2b+7b^2c+7c^2a+7ab^2+7bc^2+$

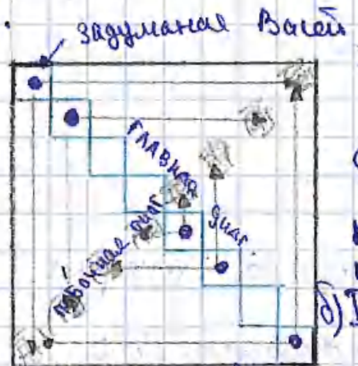
четыре

$0 = 16abc + 4a^2b + 4b^2c + 4c^2a + 4ab^2 + 4bc^2 + 4ca^2$, ~~$+2a^3 - 2a^2 +$~~

но $a, b, c > 0$. Значит такое невозможно

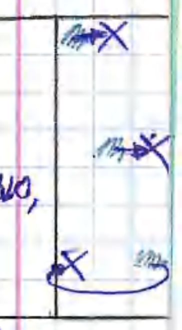
Ответ: нет.

№2.

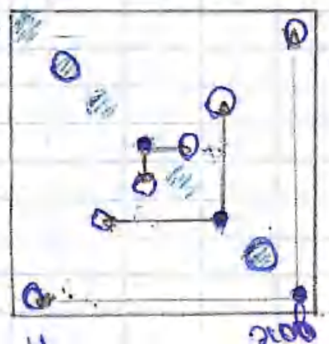


I ход: Возьмём ладьи на главной диагонали, пускай Вася указал на n клеток. а) n - чётно - мы выиграли
n - нечётно
б) II ход: Поставим в соответствие каждой названной ладье на главной диагонали 2 клетки на побочной диагонали (см. картинку) и посмотрим на эти клетки. Заметим, что ~~[illegible]~~ среди клет~~ки~~ок, куда мы смотрим, нет задуманных Васей, поскольку Вася задумывал по 1 клетке ~~на~~ в каждом столбце и каждой строчке

Сначала, расставим ладьи по этим клеткам (на каждую клетку по 1 ладье)



Если мы расставили ~~не все~~ не 8 ладей, то вернёмся на главную диагональ. ~~Заметим, что~~ Найдём клетку, в которую можно ещё поставить ладью, т.е. ту, у которой свободны и строчка и столбец. Заметим, что эта клетка не будет являться ~~отмеченной~~ задуманной Васей, т.к. иначе и строчка, и столбик у неё будут заняты на побочной диагонали. Повторим это, пока возможно. Если такой клетки не найдётся, то значит, что все строчки и все столбики заняты, т.е. уже стоит 8 ладей. Теперь, поскольку каждая ладья стоит в незадуманной Васей клетке, Вася скажет „0" и ~~мы~~ Петя выиграем. Пример игры.



• – первый ход, клетки, на которые указал Вася

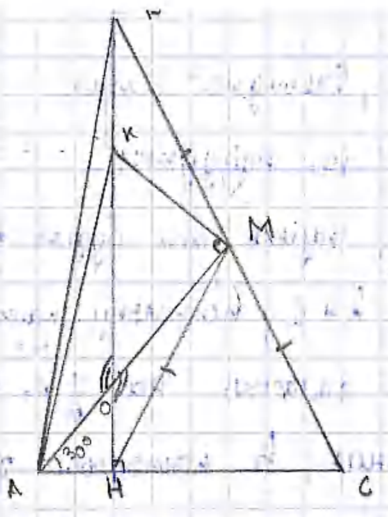
▒ – первый ход, клетки, куда Петя поставил ладьи

○ – второй ход, клетки, куда Петя поставил ладьи. ~~если Петя указал на~~

Меньше 2 нельзя, т.к. мы можем взять 3 самые правые Петины ладьи мысленно циклически сдвинуть вправо их и в полученные клетки ~~задумать~~. вместе с оставшимися 5 заду слева. Т.е. будет нечётное кол-во: пример вверху на полях.

<u>Ответ: 2</u>

№6.



Дано: $\triangle ABC$; AM – медиана; BH – высота; $KM \perp AM$; $K \in$ луч HB; $\angle HAC = 30^\circ$.

Доказать: $AK = BC$.

Доказательство: (Факт того, что K внутри $\triangle ABC$ не используется)

1. Заметим, что $AKMH$ – вписанный, т.к. $\angle KHA = \angle KMA$. Тогда $\triangle AKO \sim \triangle HMO$ по 2 углам ($\angle KOA = \angle MOH$, как вертик., $\angle AKH = \angle AMH$, как опирающиеся на равные дуги).

2. Заметим, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° меньший катет равен половине гипотенузы. Т.о. в $\triangle AOH$, где $\angle OAH = 30^\circ$, $2OH = AO$. Тогда $\triangle KAO \sim MHO$ с $k = \frac{AO}{OH} = 2$. Отсюда $2MH = AK$, как соотв. в подобных $\triangle$ с $k = 2$

3. Заметим, что поскольку M – середина BC, то HM – медиана к гипотенузе, тогда $2MH = BC$, т.к. $2MH = AK$, то $BC = AK$.

№7. Если кол-во сторон $= 3$, очевидно. Иначе:

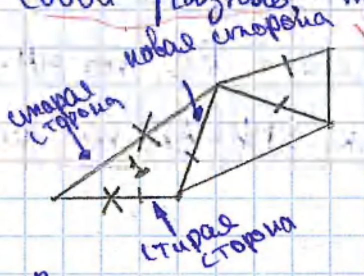
Пускай две равные стороны не найдутся.

Посчитаем кол-во диагоналей, пусть их будет K штук, тогда треугольников будет $K+1$, поскольку каждая диагональ делит целую область на две новые (т.к. выпуклый мн-к).

Теперь выберем треугольник, в котором хотя бы 2 стороны — стороны исходного многоугольника.

Такой найдётся поскольку, иначе во всех треугольник стороны будут образованы хотя бы 2-мя диагонали тогда всего диагоналей будет $\geq \frac{(K+1)\cdot 2}{2} = K+1$ (т.к. каждую диагональ посчитали дважды), но $K+1 > K$. ~~Либо останется 1 треугольник~~ Либо в многоугольнике осталось 3 стороны.

Заметим, что в этом треугольнике одна из сторон совпадает с диагональю т.к. стороны между собой разные, т.к. доказываем от противного.



не имеет отношения к делу

Выкинем из многоугольника этот треугольник, но диагональ оставим.

Теперь наша диагональ стала стороной в новом многоугольнике. Тогда кол-во диагоналей и треугольников в новом многоугольнике соответсвенно равно $k-1$ и k.

* Заметим, что наша новая сторона не должна совпадать ни с какой из ~~исходных~~ оставшихся сторон многоугольника, поскольку новая сторона совпадает с одной из уже выкинутых исходных сторон.

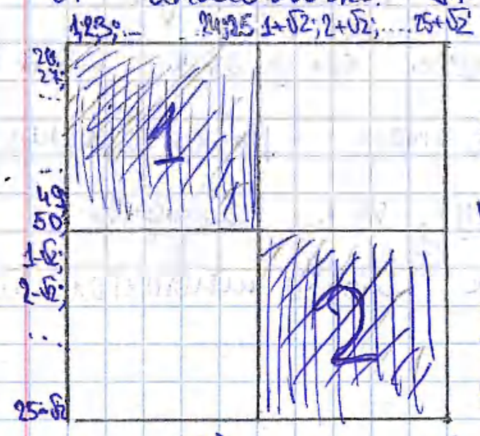
** Таким образом наше условие про отсутствие равных сторон сохранилось и для меньшего многоугольника. Повторим выкидывание 1 треугольника, пока не останется треугольник. Тогда, в конце, каждая сторона в треугольнике будет либо исходной стороной, либо исходной диагональю, которая совпадает с какой-то из исходных сторон. По условию, ~~хотя~~ все треугольники, в том числе и этот, — равнобедренные. Значит какие-то 2 совпадут, т.е. совпадут 2 каких-то из исходных сторон многоугольника. Противоречие.

№5.

Расположим первые 25 рациональных чисел ~~в~~ сверху первых 25 столбцов, следующие 25 рациональных чисел слева от первых 25 строчек.

Пускай этими рациональными числами будут являться первые 50 натуральных чисел, т.е. 1,2...50.

Теперь в оставшиеся места над столбиками расположим иррациональные числа вида $a_i+\sqrt{2}$. В оставшиеся места слева от строчек числа вида $b_i-\sqrt{2}$. Пускай теперь a_i все различны, например все числа от 1 до ~~50~~ 25, b_i аналогично. Т.о. таблица выглядит так:



Заметим, что в 1 синем квадрате все числа рациональные, т.к. сумма натуральных - рациональна

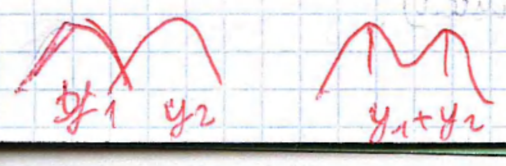
Заметим, что во 2 синем квадрате все числа рациональны, т.к. $(a_i+\sqrt{2})+(b_j-\sqrt{2})=a_i+b_j$, где a_i и b_j – рациональны.

Заметим, что во всех других клетках будет
всегда ли? только для данной конструкции
иррациональное число, т.к. $c+d$, где c – рациональное, d – иррациональное, $c+d = \frac{n_1}{m_1} + d$, если бы было рациональным, то
целое натуральное
$c + d = \frac{n_1}{m_1} + d = \frac{n}{m}$, где (n, n_1), (m, m_1) – рациональные,
$d = \frac{n}{m} - \frac{n_1}{m_1} = \frac{nm_1 - n_1 m}{m m_1}$, сократим на НОД.
$d = \frac{n_2}{m_2}$, где n_2 – целое, m_2 – натуральное,
т.е. d – рациональное. Противоречие. ~~Тогда~~

Теперь, ~~ищем~~ ~~найдём~~ докажем, что площадь
(если столбики и строчки переставлять местами ответ не изменится) при фиксированном периметре
~~квадрата~~ прямоугольника максимальна, когда это квадрат:
Соберём вместе рац. и отдельно от них иррац (строчки и столб), тогда получится ≥ кривого
$a+b = 50$, по неравенству Коши, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, при этом равенство достигается, когда $a=b$, т.е. $a=25$, $b=25$, тогда площадь $=625$. Тогда площадь 2 иного квадрата тоже ~~$a_1 b_1 = a_1^2$~~ 625
Все числа в квадратах рациональные, снаружи иррациональные, тогда

Ответ: $625 \cdot 2 = 1250$.

а если максимум будет площадь второго квадрата?



№8. Рассмотрим, какой чётности появлялись карточки, после первых 2 ~~шагов~~ минут:

I) 1 шаг). Произведений, где есть чётное, ⋮ 2. (сумма)

Рассмотрим сумму произведений, где все нечётные:

Таких троек у нас $C_{43}^{3} = \frac{41 \cdot 42 \cdot 43}{6} = 41 \cdot 7 \cdot 43$, т.е. нечётное кол-во; т.е. сумма произведений, где нет чётных, нечётна. Тогда после 1 минуты появилось нечётное число

2 шаг). Аналогично размышляя, считаем кол-во троек, где нет чётных: $C_{44}^{3} = \frac{42 \cdot 43 \cdot 44}{6} = 7 \cdot 43 \cdot 44$, т.е. чётное кол-во; тогда сумма произведений, где нет чётных чётна (поскольку ~~произведение~~ тройки нечётных нечётна). Общая сумма тоже чётна, значит появилось чётное число.

В последующих шагах, по аналогичным рассуждениям будут появляться только чётные числа.

~~Тогда~~ Т.о. кол-во нечётных $43 < k \le 44$.

(тройка – произведение 3 чисел,
двойка – П 2 чисел).

самую раннюю (шаг, после которого $\exists$ карточка с числом $\vdots\, 2^{10000}$).

II) Рассмотрим минуту, после которой появилась карточка с числом $\vdots\, 2^{10000}$. Рассмотрим как это произошло:

она будет т.к., спустя год было число $\vdots\, 2^{10000}$

начиная со 2

(Сумма троек всех чисел) $\underset{2^{10000}}{\equiv} 0$. Пускай до этого появилась карточка M с числом m, тогда

(Сумма троек всех чисел) $=$ (Сумма двоек всех чисел на карточках, без учёта карточки M) $\cdot m + m$, $\text{(Сумма двоек …)} = X$

поскольку именно m появилось на ~~???~~ прошлом шаге и ~~???~~ прошлая сумма была равна m. Т.о.

~~X~~ $X \cdot m + m \underset{2^{10000}}{\equiv} 0$

$m(X+1) \underset{2^{10000}}{\equiv} 0$. Если ~~m = Не~~ X – чётно, то ~~(X+1)~~ НОД$(X+1, 2^{10000}) = 1$, т.е. ~~???~~ $m \,\vdots\, 2^{10000}$, значит мы взяли не ~~первую~~ самую раннюю минуту, ~~после~~ после которой появилось число $\vdots\, 2^{10000}$. Тогда X – нечётно.

Но поскольку X = (сумма двоек на всех карточках, без карточки M) = (сумма ~~чётных~~ двоек, где есть чётное) $\vdots\, 2$ + (сумма двоек, где нет чётного). ~~Т.к.~~ Тогда

(сумма двоек, где нет чётного) $\not\vdots\, 2$. ~~Т.о.~~ ~~Но т.к.~~ Тогда

(мы вначале доказали это)

$C_k^2 \not\vdots\, 2$, где ~~$k \leq$~~ $43 \leq k \leq 44$. Но это возможно только при $k = 43$, т.к. $C_{44}^2 = \frac{43 \cdot 44}{2} \,\vdots\, 2$, Т.е. это возможно. ?

$C_{43}^2 = \frac{43 \cdot 42}{2} \not\vdots\, 2$

формула не применима

только на первом шаге. Т.е. самая ранняя

~~на~~ после

минута, которой получилось число $\vdots\, 2^{10000}$

Т.е. после 1 дня, карточка уже была!

на самом деле на 2 шагу возможно