1) Пусть a, в и c – натур. числа. ~~Их~~ Произведение $(a-3)(b-3)(c-3)-$
$-abc=2016$

Тогда: $abc-3ab-3ac-3bc+9a+9b+9c-27\overset{-abc}{}=2016$

$-3ab-3ac-3bc+9(a+b+c)=2043$

$-3a(b-3)-3b(c-3)-3c(a-3)=2043$

~~При~~ $\overset{1}{a}(\overset{-2}{b-3})+\overset{1}{b}(c-3)+c(\overset{-2}{a-3})=-681$

~~Пусть $a<3$ Тогда $a(b-3)<3b-9$~~
~~$c(a-3)>-6ac$~~
~~$a(b-3)+b(c-3)+c(a-3)>-681$~~

Произведение будет меньше 0 при $\left[\begin{array}{l} a<3 \\ b<3 \\ c<3 \end{array}\right.$

При $a=1$
$b=1$

$a(b-3)+b(c-3)+c(a-3)=-2+c-3-2c=-c-5=-681$

$c=676$

При $c=676$ $abc=676$

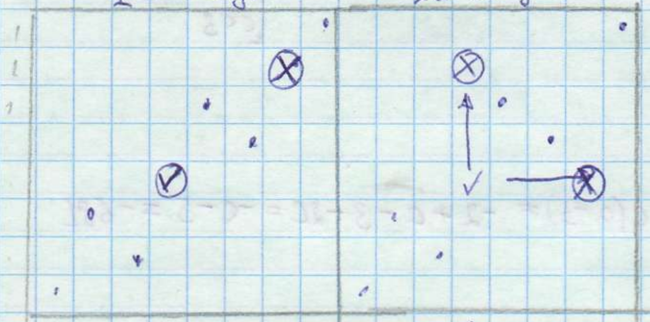
$(a-3)(b-3)(c-3)=2692$

$(a-3)(b-3)(c-3)-abc=2016$

Ответ: Произведение могло увеличиться на 2016 $\overset{\text{например}}{}$ при $a=1$
$b=1$
$c=676$

2) Первым ходом Петя расставляет ладьи, не бьющие друг друга. Если число ладей, стоящих на задуманных клетках чётно, то Петя выиграл, если же нет, то Пете известна хотя бы одна задуманная клетка ~~„правильная" ладья~~. Тогда следующим ходом Петя выставит все ладьи так же, как и в прошлый раз, поменяв при этом две ладьи столбцами, причём одна ладья будет с задуманной клетки, а вторая - наоборот, с клетки, которую Вася не задумал. Т.к. с задуманной клеткой в строке и в столбце нет задуманных клеток, то обе ладьи будут стоять не на задуманных клетках, что даст Пете чётное число ладей на задуманных клетках.

1й ход. 2й ход.



– 1 ладья на задум. клетке

А может ли за 1 ход?

Ответ: Петя выиграет не более чем за два хода

почему за 1 не всегда?

3) $x^3+y^3+z^3 = (x+y)(y+z)(x+z) = 2xyz + xy^2 + x^2y + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$

$xyz = x^2(x-y-z) + y^2(y-x-z) + z^2(z-x-y)$

т.к. x, y и z - стор-ы треуг-ка, то

$$\left.\begin{array}{l} y+z>x>0 \\ x+z>y>0 \\ x+y>z>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2(x-y-z)<0 \\ y^2(y-x-z)<0 \\ z^2(z-x-y)<0 \end{array}$$

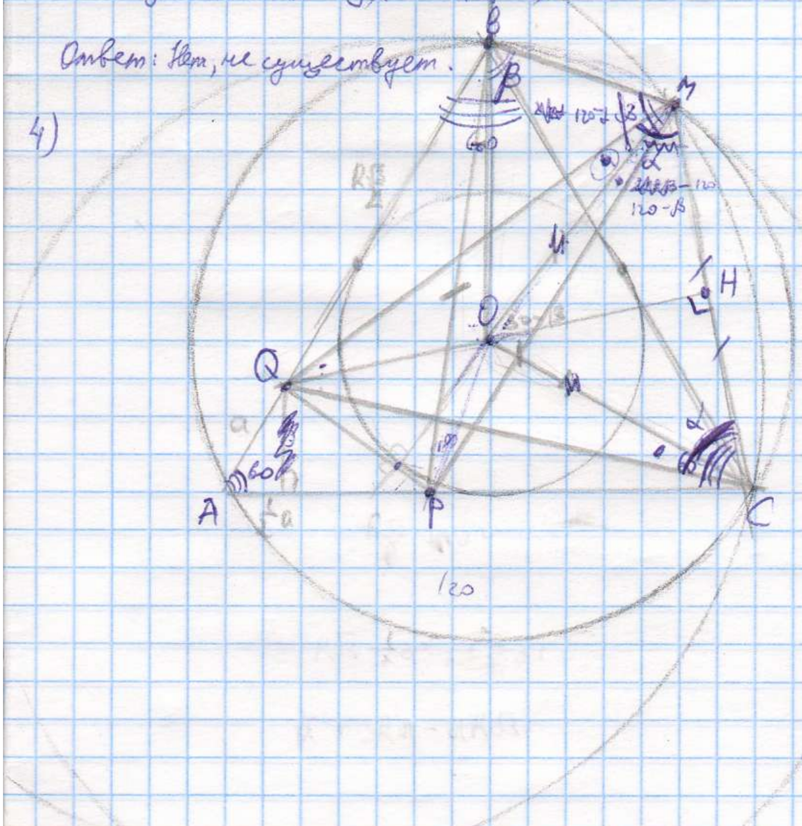
$$\left.\begin{array}{l} x^2(x-y-z)+y^2(y-x-z)+z^2(z-x-y)<0 \\ xyz>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \times$$

не существует таких x, y и z что

$x^3+y^3+z^3=(x+y)(x+z)(y+z)$

Ответ: Нет, не существует.

4)



Дано: $\triangle ABC$ - равносторонний

$W(O;r)$ впис. в $\triangle ABC$

$W_1(O;R)$ опис. ок. $\triangle ABC$, $P\in AC$, $Q\in AB$, PQ - кас-я к $W(O;r)$, $M\in W_3$

$W_2(Q;QC)$

$W_3(P;PB)$, $M\in W_2$

Д-ть: $M\in W_1$

Док-во: QH - выс-а

в $\triangle QMC$, $MH=HC$ (по св-ву равн-$\triangle$)

1) Пусть x - число рациональных чисел в столбцах.

Тогда $(50-x)$ - число рациональных чисел в строках.

$x(50-x)=a$, где a - наибольшее число рациональных чисел, т.к. $i_n + r_m = i$, $i_n + i_m = i$ не обяз.

$r_m + r_n = r_k$ (сумма двух иррац. чисел или иррац. и рац. чисел есть число иррациональное).

$x(50-x)=a$

$-x^2+50x-a=0$

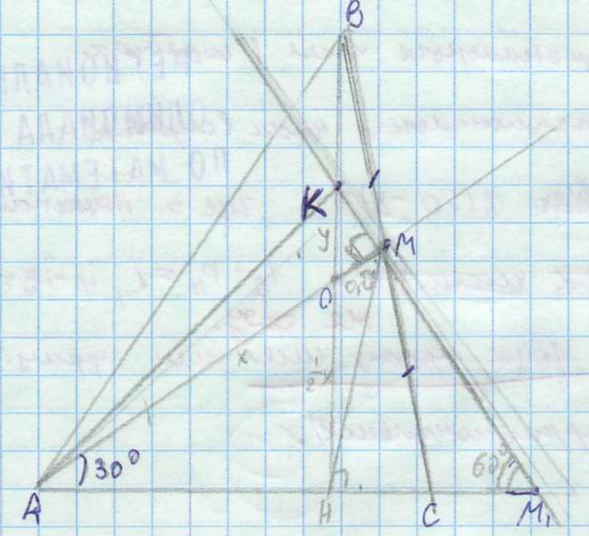
$2500-4a \geq 0$

$a \leq 625 \Rightarrow a=625$

Ответ: В этой таблице число рациональных сумм не более 625.

2)

6)



Дано: $\triangle ABC$ — остроуг-й

AM — медиана, BH — высота

$MK \perp AM$, $K \in HB$

$\angle MAC = 30°$

Д-ть: $AK = BC$

Док-во: Д.п. луч. $KM \cap$ луч. $AC = M_1$; $KH \cap AM = O$; MH

в $\triangle AOH$ $AO = 2OH$ (т.к. $OH \perp AC$ и $\angle OAH = 30°$); рассм. $\triangle OMH$ и $\triangle OKA$; $\angle HOM = \angle AOK$ (как верт.), $AO = 2OH$, $KO = 2OM$ (т.к. в $\triangle KOM$ $\angle OMK = 90°$ а $\angle KOM = \angle AOH$ (как верт.) $= 60°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OMH \sim \triangle OKA$ (по II ПП) $\Rightarrow MH = \frac{1}{2}AK$; в $\triangle BHC$ BM — мед-а проведённая из верш. пр. угла $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AK \Rightarrow AK = BC$

7) Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — n-угольник, разрезанный данным образом. Тогда число треугольников полученных таким образом будет равно $(n-2)$, а число диагоналей $(n-3)$

Зададим периметры всех треугольников через их стороны

$2x_1 + a_1$ $\quad 2x_2 + a_2$ $\quad 2x_3 + a_3$ и т.д.

Сумма всех периметров будет равна

$2(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2})+(a_1+a_2+\ldots+a_{n-2})$

~~Тогда~~ во всех треугольниках будет $3(n-2)$ сторон

не сторон $2n-3$, а диаг. $2n-6$

При числе диагоналей $(n-3)$ и числе сторон n

Сумма сторон будет $2n-3$ $\Rightarrow$ $n-3$ сторон являются смежными.

В каждом треугольнике смежной может быть только диагональ (т.к. $A_1A_2\ldots A_n$ — выпуклый и диагонали не пересекаются)

$\Rightarrow$ Для того чтобы в многоугольнике не было равных сторон необходимо, чтобы при делении на треугольники не содержалось треугольника из диагоналей, т.к. в противном случае две диагонали будут равны друг другу, и след-но и две стороны будут равны друг другу (т.к. нельзя сост-ть треугольник из одних сторон многоуг-ка с неравными друг другу стор-ми. $\Rightarrow$ $D_1=a_1$, $D_m=a_m$, $D_1=D_m \Rightarrow a_1=a_m$.

$\Rightarrow$ Рассмотрим деление на треугольники, где образуются треугольники с одной и с двумя диагоналями. Т.к. треугольников с одной диагональю может быть (2), а треугольников с 2мя диаг. может быть $(n-4)$, и если в 1м треугольнике

≤ или ≥ ?

$a_1a_2D_1$ — где a — стор-ы, а D — диаг., $a_1\neq a_2$ то $\left[\begin{array}{l} a_1=D_1 \\ a_2=D_1 \end{array}\right.$ в треуг-ке

ч.с.?

$D_1D_2a_3$ $a_3\neq D_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_2=D_1 \\ a_3=D_2 \end{array}\right.$ в треуг-ке $D_2D_3a_4$ $a_4\neq D_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_4=D_4 \\ D_4=D_3 \end{array}\right.$ и т.д. до 2го треуг-ка с двумя стор-ми т.к. D_m равно одной из сторон многоугольника то

• если ~~Δ~~ 2й треугольник с 2мя стор-ми от многоугольн- будет равнобедренным то одна из сторон многоугольника равна другой.

8) Предположим что по окончании 1го дня карточка не была готова. Для записи такой карточки необходимо нечётное число произведений кратных 2^{9999}, неч-е число произв-й кратных 2^{9998} и т.д. + чётное число нечётных произведений. Значит за 1440 мин. это условие не было достигнуто ⇒ или число чётных произведений кратных 2^n было чётным или число неч-х произвед-й было нечётным. ~~следовательно~~

Проверим неч-е произведения: в 101й карт. число произведений неч-х равно $\frac{43\cdot42\cdot41}{6}=43\cdot41\cdot7$ — нечётное ⇒ 101ая сумма ~~карточка~~ нечётная, но со 102й карточки число нечётных произведений не меняется: $\frac{44\cdot43\cdot42}{6}=44\cdot43\cdot7$ - чётное ⇒ новая сумма ~~карточка~~ будет чётной ⇒ число нечётных чисел на карточках ~~карточек~~ не изменится.

Значит число чётных произведений кратных 2^n было чётным следовательно сумма всех произведений на кратна 2^{n+1} ⇒ новая сумма на карточке ~~карточка~~ кратна лишь 2^n тогда в следующ карточке сумма произведений, кратных $2^n = 2X + 1\cdot\frac{n(n}{2}$

n — число нечётных сумм на карточках ~~карточек~~.

?

Не доказано

Т.к. изнач-но $n = 43$, а со ~~[illegible]~~й ~~карточки~~ суммы - 44м то $\frac{44\cdot 43}{2}$ — чётное, а значит чётность кол-ва произведений кратных 2^n не изменится $\Rightarrow$ новая ~~карточка~~ сумма будет той же кратности что и предыдущая: кратна 2^n но не кратна 2^{n+1}. Значит никакая последующая ~~карточка~~ сумма не будет кратна 2^{10000} $\Rightarrow$ X условию $\Rightarrow$ в 1й день было достигнуто условие и была записана карточка число на которой было кратно 2^{10000}.

Не доказано

4) (примечание) Перед суммированием всех произведений мы ~~расположили~~ распределяем их по кратности: ~~числа~~ произведения не кратные двум; произведения, кратные 2м, но не кратные 4м; произв-я, кратные 4м, но не кратные 8м; и т.д.

где