9.1 Можно.

~~Рассмотр~~

Модуль произведения не ↓, только если в наборе пр-я есть две 1 (в этом случае $1 \cdot 1$ переходит в $(-2)\cdot(-2) = 4$)

Значит, в наборе 2 единицы. ⅃ 3-е число n

Сначала произведение было $p_1 = 1 \cdot 1 \cdot n = n$

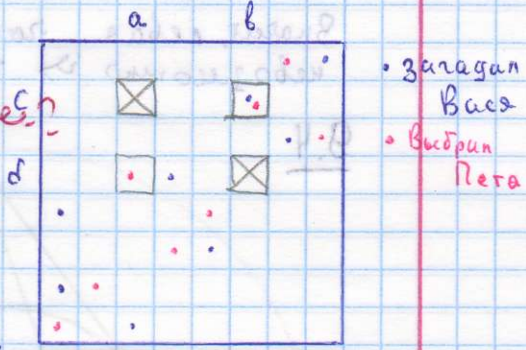
Стало оно $p_2 = 4(n-3)$

По усл. $p_2 = p_1 + 2016$

$$3n = 2028$$
$$n = 676$$

При наборе $(1; 1; 676)$ условие выполняется. $(p_1 = 676,\ p_2 = 2692)$

9.2 Мы ищем гарантированный успех ⇒ в первый ход не угадал четное число клеток. подробнее? Значит, есть хотя бы одна угаданная и хотя бы одна не угаданная.



Пусть Петя угадал клетку $(b; c)$, и не угадал $(a; d)$
$a \neq b$, $c \neq d$ – из усл.

Тогда ~~кле в клетке~~ клетку $(a; c)$ и $(b; d)$ Вася загадать не мог, т.к. это бы противоречило условию совместимости с загаданной клеткой $(b; c)$

На второй ход Петя может выбрать все прежние клетки, но клетки $(b; c)$ и $(a; d)$ заменить на $(a; c)$ и $(b; d)$. Там ~~никто~~ не загадано (по док.) ⇒ Вместо i угаданных клеток в первом ходе Петя угадает $(i-1)$ клетку, а это чётное число, т.к. i нечёт.

Ответ: 2.

9.3. 1) $(x+y)(y+z)(z+x) =$

$$= 2xyz + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$$

2) $x^3+y^3+z^3 = (x+y)(y+z)(z+x)$

$1,2 \Rightarrow x^2(x-y-z) + y^2(y-x-z) + z^2(z-x-y) - 2xyz = 0$

Для $\forall$ стороны Δ (треуг.) $a < b+c$ по нер-ву Δ (треуг.)

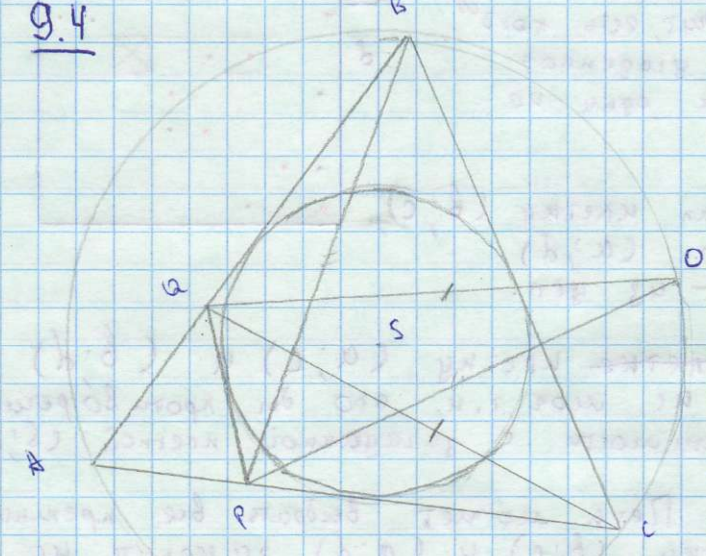
Значит, если Δ (треуг.) со сторонами x, y, z есть, то

$x-y-z<0$, $y-x-z<0$, $z-x+y<0$

Это значит, что первые три слагаемых отрицатель- ные, т.к. $x^2>0$, $y^2>0$, $z^2>0$.
Также Богом дано, что $-2xyz<0$, т.к. стороны полож.

Значит, левая часть ур-я отрицательна, что невозможно $\Rightarrow$ такого треугольника не существует.

9.4



Дано: ...

Д-ть: ...

Док-во:

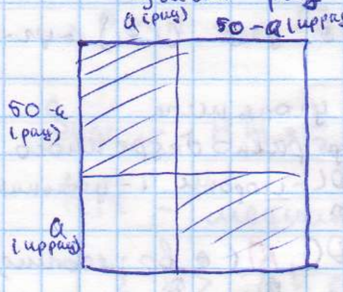
Ω и Ω_B пересекаются
~~т.к. центр. Ω_B лежит внутри Ω, а радиус у нее больше.~~ не аргум
$\exists\ \Omega \cap \Omega_B = O$.
Тогда $PB = PO$
$\angle BOC = 120°$ (опирается на дугу $240°$)
Если мы докажем, что ΔBPO равнобед. с основ. BO, то это будет значить, что

у окружностей есть общая точка.

Утв

он равнобедренный
по построению

9.5 Сумма двух рац. чисел — рац. число
Сумма двух иррац. чисел — когда как; м.б. тоже рациональное ($\sqrt{3} + (5-\sqrt{3}) = 5$ — рац.)
Сумма рац и иррац — иррац. всегда

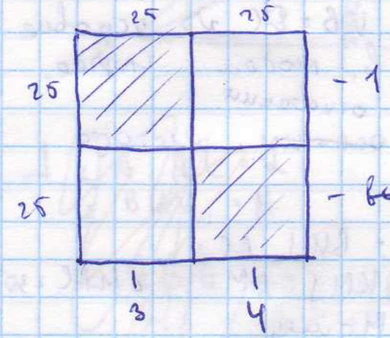


Сверху записано a рац. чисел.
Тогда сбоку 50 − a рац. чисел и $50-(50-a)=a$ ир-рац. чисел.
Сверху тогда $(50-a)$ ир-рац. чисел.
Найдём кол-во сумм, где рац + рац или иррац + иррац.

$$n = (50-a)a + (50-a)a = -2(a-25)^2 + 1250$$

n максимально при $a=25$, тогда $n = 1250$
(ветви такой параболы вниз идут)

Покажем, что это возможно.



25 строк „первых" это ~~рац. числа~~ натур. числа от 1 по 50

25 столбцов „третьих" это натур. числа от 51 по 100

25 строк ~~эт~~ „вторых" это числа вида $a_n = n + \sqrt{2}$, где n — номер строки сверху вниз

25 столбцов „4" это числа вида $a_n = n - \sqrt{2}$, где n — номер столбца (слева направо)

Такой пример подтверждает, что все 100 чисел разные, и что 1250 можно набрать (т.к. $(n+\sqrt{2})+(n-\sqrt{2}) = 2n$, а это натур. число ⇒ рациональное

9.7 1) Для треугольника условие, очевидно, выполняется.

2) Пусть утверждение истинно для i-угольника

3) Докажем истинность утв-я для (i+1)-уг-ка

почему?!

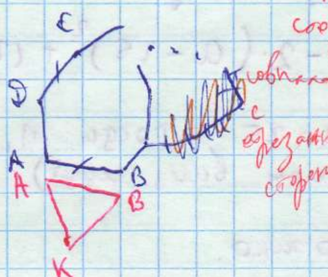
(i+1) угольник получается из i-угольника путем „приклеивания" к нему ~~тр~~ равнобедренного треугольника.

AB, DC - стороны i-угольника

Chop suey

Пусть в i-уг. ~~рав~~ AB = DC ~~AB~~ (возможно, что B и D, например, это одна точка, т.е. AB, DC - последовательные стороны)

почему один из сторон в i-угольнике

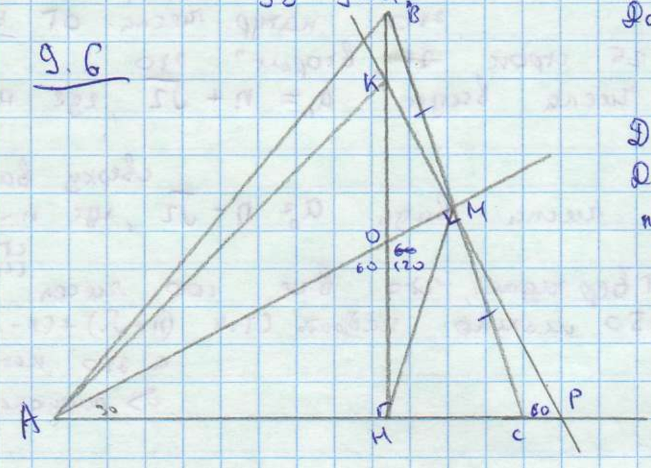


Если в △ABK AK=KB, то усл.-е выполняется.

Если в △ABK AB=AK или AB=KB, то соотв. либо AK=DC, либо KB=DC => условие выполняется в любом случае.

Значит, утв-е истинно на ~~осн-ии~~ основании метода мат. индукции.

9.6



Дано: BH⊥AC
KM⊥AM ∠MAC=30°
AM-мед
Д-ть: AK=BC
Док-во:
по Т. о сумме углов в △AOH получаем что ∠AOH=60
в ч-уг-ке OMPH два угла 90° => сумма двух других
∠MPH=∠AOH как углы со взаимно-перп. сторонами

(можно доказать это: ∠MOH=120° из св-в смежных

углов, а в $MPKO$ ~~4 уг~~ 2 угла 90° $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MPK = 60^\circ$)

по II лемме о высотах* (методичка ЗФТШ)
$\triangle PMH \sim \triangle PAK$ с коэф. подобия
$\cos\angle MPH = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Значит, $HM = \frac{1}{2} AK$ (1)

HM – медиана из прям. $\angle BHP$ прямоугольн. $\triangle BHC \Rightarrow HM = \frac{1}{2} BC$ (2)

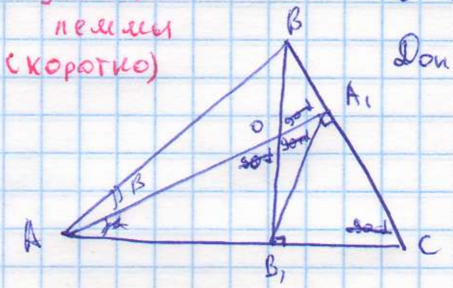
1, 2 $\Rightarrow$ $AK = BC$

* док-во леммы (коротко)

в остроугольном $\triangle ABC$ AA_1, BB_1 – высоты

Док-ть: $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CAB$ с коэф. подоб. $\cos C$

Док-во:



$\triangle AOB_1 \sim \triangle BOA_1$ по 2 углам

$\Rightarrow \cancel{\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{AO}{OA_1}}$ $\frac{OB}{AO} = \frac{OA_1}{OB_1}$

$\Rightarrow \frac{OB}{OA_1} = \frac{AO}{OB_1} \Rightarrow$ $\cancel{\triangle AOB = \triangle A_1OB_1}$
$\triangle AOB \sim \triangle B_1OA_1$
(по II сторонам и углу между ними – вертикальные)

~~Пусть $\angle A_1AC = \alpha$~~

Пусть $\angle BAA_1 = \beta$

~~$\angle ABA_1 = 90^\circ - \beta$ – очевидно~~

~~$\angle C = 90^\circ - \alpha = \angle AOB_1 = \angle BOA_1$,~~

~~$\angle OBA_1 = \alpha$ ($\triangle OBA_1$)~~

~~$\angle A_1OB_1 = 90^\circ + \alpha$ (внешний угол $\triangle OBA_1$)~~

из подобия $\Rightarrow \angle OB_1A_1 = \beta \Rightarrow \angle A_1B_1C = 90^\circ - \beta$

$\angle ABA_1 = 90^\circ - \beta$ – очевидно ($\triangle ABA_1$ прямоугольный)

Значит, $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CAB$ по 2 углам.

Если $BC = x$, то $B_1C = x\cos C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ коэф. подобия $\cos C$

9.8. Допустим, что число, кратное 2^{10000} было через час после начала эксперимента. Тогда через день карточка с нужным числом уже была. Всё доказано. (это шутка)

0 б.