№1.

Пусть заданные изначально числа: a, b, и c тогда их произведение в начале: $p_1 = abc$, после уменьшения сомножителей: $p_2 = (a-3)(b-3)(c-3)$ тогда их разность $p_2 - p_1$, а по условию она равна 2016.

$$p_2 - p_1 = 2016$$

$\cancel{abc}$

$(a-3)(b-3)(c-3) - abc = 2016$, т.к. произведение увеличилось, то

$$(a-3)(b-3)(c-3) > abc,$$

но заметим, что если $a \geq 3$, $b \geq 3$ и $c \geq 3$

$$(a-3) \leq a$$
$$(b-3) \leq b$$
$$(c-3) \leq c,$$

а т.к все числа ~~положения~~ неотрицательные

$$(a-3)(b-3)(c-3) \leq abc$$

противоречие, значит хотя бы одно из чисел a, b, c ~~отрицательные~~ < 3, но т.к. они все натуральные то это либо 1 либо 2

заметим, что если a, b, или c < 3, то соответственно или $(a-3) < 0$ или $(b-3) < 0$ или $(c-3) < 0$, но заметим, что если у нас только ~~два~~ одно или все 3 числа из a, b, c меньше 3 то произведение $(a-3)(b-3)(c-3) < 0$, но такое невозможно, т.к. оно больше, чем abc, которое больше 0.

Значит у нас 2 из чисел a, b, c меньше 3

не теряя общности
пусть это a и b
тогда возможно 4 случая

1 $a=1$ $b=1$

2 $a=2$ $b=2$

3 $a=1$ $b=2$

4 $a=2$ $b=1$

$$\begin{array}{r|l} 2028 & 3 \\ \underline{-18} & 676 \\ 22 & \\ \underline{-21} & \\ 18 & \end{array}$$

1 $a=1$; $b=1$

тогда

$(1-3)(1-3)(c-3)-c=2016$

$(-2)(-2)(c-3)-c=2016$

$4(c-3)-c=2016$

$4c-12-c=2016$

$3c=\cancel{2004}\ 2028$

$c=\cancel{668}\ \cancel{678}\ 676$

$$\begin{array}{r} 673 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 2692 \end{array}$$

$a=1$; $b=1$ $c=\cancel{668}\ 676$

из начально 676 потом 2692

$2692-676=2016$

б) $a = 2 \quad b = 2$

$\cancel{(-1)(-1)(c-3) - c = 2016}$

$\cancel{(c-3) - c = 2016}$

$\cancel{-3 = 2016}$

$\cancel{c \in \varnothing}$

~~б)~~ $\cancel{a = 1 \quad b = 2}$

$\cancel{(-1)(-2)(c-3) -}$

$$(-1)(-1)(c-3) - 4c = 2016$$

$$(c-3) - 4c = 2016$$

$$-3c = 2019$$

$$c < 0$$

но $c \in N$

тогда $c \in \varnothing$

в) ~~$a=b$~~

$a=1 \quad b=2$

$(-2)(-1)(c-3)-2c=2016$

$2c-6-2c=2016$

$-6=2016$

~~$c\in$~~

$c\in\varnothing$

г) аналогично в

$c\in\varnothing$

Ответ: Да, когда числа: 1; 1; 676

№2. шахматная доска 8×8
по принципу Дирихле
в каждом столбце 1
загаданная клетка Васей
т.к. и столбцов и клеток
по 8 и ни в одном
столбце нет двух
~~так~~ загаданных клеток
аналогично в каждой строке
есть загаданная клетка
и только 1
ход Пети: т.к. ладьи
не бьют друг друга, то
нет двух ладей стоящих
в одной строке или в
одном столбце
тогда аналогично
расставлению загаданных
клеток по принципу
~~Ди~~ Дирихле в каждой

строке и в каждом
столбце по одной клетке
~~Тут возможно~~ Расставив
ладьи возможно 2
варианта событий далее:
– Петя уже выиграл
– у Пети нечетн. кол-во
ладей на загаданных клетках,
тогда есть хотя бы одна
ладья на загаданной клетке
и хотя бы одна не
на загаданной, причем
мы знаем, где какая
находится. Пусть эти ладьи

находятся
на закрашенных
клетках

Тогда поменяем их строками.
Не теряя общности пусть
Л1 – стоит на загаданной
клетке, Л2 – стоит
на не загаданной клетке,
тогда
А1 после перемещения
будет стоять на
клетке {стр в; стлб d}
а Л2 {стр а; стлб е}
Заметим, что в строке
а загаданная клетка
находится в столбце d
и она только одна
значит Л2 снова будет
стоять на незакрашенной
клетке, ~~в ст~~ аналогично
в столбце d только

она закрашенная клетка и она
в строке a таким образом
Л1 тоже станет стоять
на незакрашенной клетке
оставив остальные
ладьи на тех местах,
где они стояли раньше,
поменянные ладьи не
будут их бить т.к
они бьют только:
стр a; стр в; стб d; стб E,
а в этих строках и
столбцах других ладей
быть не может по условию
~~До~~ Сделаем второй ход
таким образом, заметим

то что число ладей стоящих на задуманных клетках уменьшилось на 1, и таким образом четность этого числа изменилась и тогда Петя выиграл на втором ходу.

За 1 ход невозможно т.к. ни известно ничего до начала игры и ~~то~~ из поставленных ладей ~~только~~ любое кол-во неочевидно может стоять на задуманных клетках

Ответ: 2 хода

№3.

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$$

Для существования треугольника необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\begin{cases} x+y\geq z \\ x+z\geq y \\ y+z\geq x \end{cases}$$

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3x^2y-3x^2z$$
$$-3y^2z-3y^2x-3z^2x-3z^2y-6xyz$$
$$=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\stackrel{?}{=}(x+y)(y+z)(z+x)$$

↑ по условию

тогда

$$(x+y+z)^3=4(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^3=\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{2}$$

не теряя общности пусть

$x\geq y\geq z>0$, для сущ-ния треугольника

$$p^3 = \frac{(2p-2x)(2p-2y)(2p-2z)}{2}$$

$$p^4 = \frac{8p(p-x)(p-y)(p-z)}{2}$$

$$\frac{p^4}{4} = p(p-x)(p-y)(p-z)$$

$$\frac{p^2}{2} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} =$$

$$= S$$

$$S = pr$$

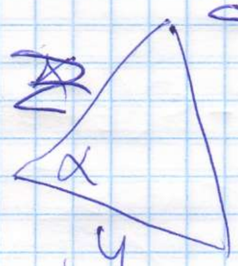
$$r = \frac{p}{2}$$

$S = \frac{1}{2} x h_x$

$x h_x = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2$

$\cancel{2xh}$

$S = \frac{1}{2} xy \sin\alpha = \frac{1}{2} yz \sin\alpha$



$S = \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{8} \geq yz$

$\sin\alpha < 1$

$\frac{1}{2} < 1$ тогда

$S = \frac{1}{2} yz \sin\alpha < yz$

но $yz \leq S$

противоречие

Ответ: нет

№5

Рассмотрим различные варианты суммы

1 рациональное + рациональное = = рациональное

Докажем это

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb + aq}{qb}$$, если $pb+aq<0$ то $\frac{-(pb+aq)}{-qb}$

т.о. числитель натуральный знаменатель целый, число рационально по определению

2) $\cancel{\frac{p}{q} + a}$ a

2 рационалное + иррациональное = иррациональное

Докажем это:

пусть это не так, тогда:

$$\frac{p^{\in N}}{q_{\in Z}} + a^{-\text{иррациональное}} = \frac{c^{\in N}}{d_{\in Z}}$$

тогда $a = \dfrac{pd - cq}{qd} = \dfrac{cq - pd}{-qd}$

$\overline{\text{одна из дробей}}$ есть число рационалное по определению числитель натуралоный ~~числитель~~ ~~и~~ знаменатель целый и тогда рационалоное число равно иррациональному, но такого быть не может, противоречие значит

рацион + иррацион = иррацион

3 иррациональное
+ иррациональное
эта сумма может
быть, как иррациональной,
например $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, так и рациональной
$\sqrt{2}+(6-\sqrt{2})$, где $6-\sqrt{2}$
число иррациональное
~~докажем это~~ ~~и~~ что следует
из пункта 2 наших сумм

заметим, что т.к. нам
нужно максимизировать
кол-во рациональных чисел
в таблице сделаем
так чтобы большинство
(иррац+иррац)
таких сумм было рациональными
числами, сделаем это
следующим образом

Пусть все иррациональные числа написанные сверху от столбцов будут представляться в виде $a_i+\sqrt{2}$, где a_i различные числа для каждого столбца, целые

А все иррациональные числа написанные слева от строк будут представляться в виде $b_j-\sqrt{2}$, где b_j различные целые числа для каждой строки

Заметим, что такое преобразование не изменит результат всех остальных видов сумм (рац+рац, рац+иррац), но зато

все суммы вида
~~ка~~ иррац + иррац
станут рациональными
более того они будут
целыми $(a_i - \sqrt{2}) + (b_j + \sqrt{2})$

$$= \underset{\in \mathbb{Z}}{a_i} + \underset{\in \mathbb{Z}}{b_j} \in \mathbb{Z}$$

таким образом количество сумм являющихся рацио-нальными числами только увеличится

Пусть количество рацион. чисел над столбцами a, над строками c, иррацион. над столбцами b, над строками d
Тогда по условию

$a+c=50$
$b+d=50$ $\qquad b=c$
$a+b=50$ $\iff$ $a=d$
$c+d=50$

тогда т.к. ~~всегда~~
рацион + рацион = рацион
из этого вида суммы + a·c
[a·c] чисел лежат в строках и столбцах, которые оба подписаны рациональными числами, ~~то~~ т.к. иррацион + иррацион = рацион после ранее описанного преобразования то таких чисел b·d – лежат в строках и столбцах, которые оба подписаны иррациональными числами т.к. остальные суммы рацион + иррацион = иррацион

то рациональных чисел
из них в таблице
не появляется тогда
всего в таблице
чисел

$ac+bd = ab+ba =$, т.к $a=c$
$b=d$
$= 2ab$

и $a+b=50$

пусть для данных a и b достигнуто максим $2ab$

тогда не теряя общности пусть
$a > b$, тогда будем
сближать значения a, b (метод
Штурма) $a_1 = a-k$ т.о, что
$b_1 = b+k$ $0<k \leq \frac{a-b}{2}$

$a_1+b_1=50$

$2(a_1 b_1) = 2(a-k)(b+k) =$
$= 2(ab + k(a-b) - k^2) =$
$\underset{>0}{}$
$= 2(ab + k(a-b-k))$ тогда
$2ab + \underbrace{k(a-b-k)}_{>0} > 2ab$, противоречие
значит сближать числа было нельзя

т.к. они будут равны
значит, чем ближе значения
~~тем~~ друг к другу тем
больше $2ab$, тогда
max значение достигается
при $a = b$

$a + b = 50$

$2a = 50$

$a = 25$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 50 \\ \hline 1250 \end{array}$$

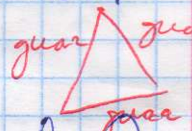
$2ab = 2 \cdot 25 \cdot 25 = 50 \cdot 25 = 1250$

Ответ: максимально 1250

№7. многоугольник — с n углами

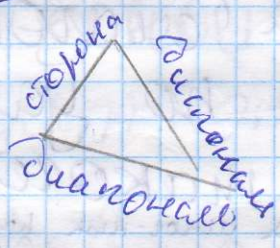
Заметим, ~~то~~ что сторона многоугольника может входить в треугольники 3ех видов. Я рассматриваю $n>3$, случай $n=3$ очевиден, т.к. в нем нельзя провести диагоналей, значит сам треугольник изначально равнобедренный и у него есть равные стороны

3 вид



1 вид ровные? (видимо, нет)

2 вид.



вид

не возм т.к $n>3$

Докажем, что найдется треугольник первого вида хотя бы один.

пусть нет тогда тогда для каждой стороны есть свой треугольник веса 2 ~~значит всего~~ в каждом по 2 диагонали тогда всего диаг. $2n$, но заметим что мы посчитали каждую диагональ 2 раза, в двух треугольниках или 3 раза, только 2 т.к. диагонали не пересекаются

тогда диагоналей непересекающихся по условию $2n/2 = n$, но такого быть не может т.к. тогда многог-ник разбит на $n+1$ выпуклых многоуг. (диагон. не пересекаются) тогда сумма углов ~~...~~ в каждом равн

тогда найдется хотя бы один треугольник

сумме углов в исходном тогда $n \cdot 180 < (n-2)180$ но такого быть не может противоречие ока 1. Начнем с него, многоугольник разбит

заметим, что в нем диагональ равна одной из сторон, для выполнения условия равнобедренности.

⇒ Рассмотрим второй треугольник в котором она лежит если

1) она равна одной из сторон значит это а или в

сторона равна стороне исходного многоугольника значит повторим этот шаг

2 ~~Если в этом треугольнике $a=b$, то повторим относительно каждой~~

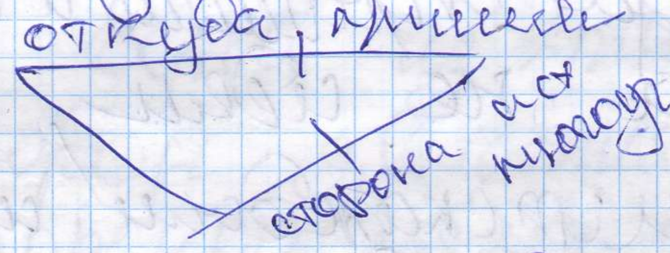
~~$a=b$, то рассмотрим часть многоугольника~~

и одна из этих сторон является стороной исходного многоугольника повторим этот шаг

3 Если в этом треугольнике $a=b$, тогда рассмотрим ~~часть~~ относительно каждой из них этот шаг, но с учетом того, что эти диагонали не равны стороне, а равны между собой

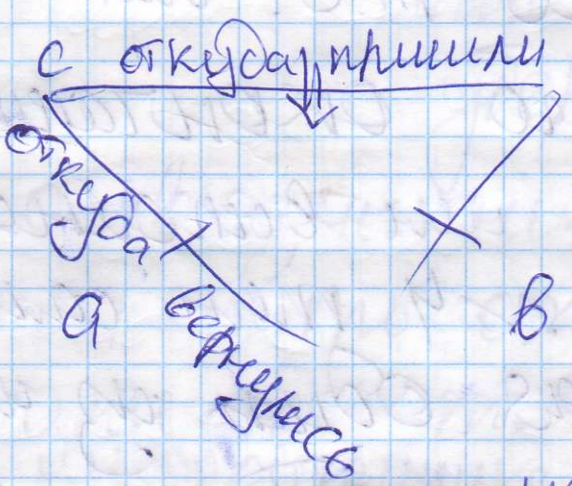
Заметим, что
т.к. диагонали
не пересекаются
то каждым шагом мы
отделяем ту часть
откуда пришли и больше
туда не будем,
значит с каждым шагом
область для последующего
возможного ~~шаг~~ шага
у нас остается
меньшая, чем
раньше, а т.к.
многоугольник не
бесконечен, то рано или
поздно этот алгоритм

после рассмотра одного из шагов окажется, что идти больше некуда, а такое возможно только в случае, когда ~~...~~



сторона откуда пришли равна стороне исходного многоугольника, если в процессе пути не происходило шагов №3, значит она равна ещё какой-то стороне исходного многоугольника, а такого по нашему допущению быть не может, противоречие, значит были шаги № 3

4 вернемся к последнему



т.к. а=в ~~не~~ и а равна одной из сторон

? многоугольника

треугольника, т.к. в процессе шагов далее это выяснилось таким образом шаг для стороны в из этого треугольника преобразуется в шаг 1 с учетом того, что примени мы со стор. в выполним его и пройдем дальше.

Заметим, что так как всего шагов конечно, то и шагов типа 3 конечно т.о. для каждого окончания шагов мы выполняем шаг №4 тем самым убирая один из шагов №3 преобразуя в шаг №1 тогда ~~так~~

№3

кол-во шагов на пути от стороны многоугольника до такой ситуации

кончится рано или поздно если ~~нет~~ еще не кончилось шагом 4. уберем ее

т.о. возникнет такой путь от одной стороны исх. многоугольника до такой ситуации, а значит сторона а будет в таком случае равна стороне исх. многоугольника находящейся в начале этого пути, они обе являются сторонами исходного многоугольника и равны, противоречие значит наше допущение не верно, значит в исходном многоугольнике найдутся две равные стороны ч. и т. д.

№8.

• ~~Посчитаем четность~~ попарных произведений в начале, для этого найдем кол-во нечетных слагаемых, ~~попарное~~ произведение 2ух чисел нечетно если оба числа нечетны тогда таких слагаемых $C_{43}^2 = 43 \cdot 21$ – нечетно значит и искомая сумма попарных произведений в начале нечетна

Зачем?

• Сумма чисел на карточках S в начале нечетна т.к. нечетное кол-во нечетных слагаемых в ней.

• Теперь найдем четность первого числа которое будет написано на доске, а это по условию ~~для ко~~ суммах произведени для каждых трех карточек. Для этого найдем количество нечетных слагаемых в ней, произведение трех чисел нечетно, только если все три числа нечетны, тогда в начале таких слагаемых $C_{43}^{3} = 43 \cdot 7 \cdot 41$ число нечетное значит и искомое первое написанное число X нечетно.

Теперь рассмотрим процесс добавления новой карточки в комплект (начиная со 2ой)

текущая X карточка — карточка, которую последней до этого момента добавили новая Y — которую сейчас добавляем

- Найдем число на новой карточке у это ~~...~~ сумма (суммы произведений всех карточек без текущей) и (с текущей карточкой) - (то есть число на текущей карточке) и (число на текущей карточке умноженное на сумму ~~попарных~~ произведений без текущей карточки)

$$y = x + x \cdot pr$$

для рекуррентности

- найдем ~~...~~ сумму попарных произведений с текущей карточкой

$$pr' = pr + x \cdot s$$

попарные произведения без текущей карточки ~~...~~ плюс текущее число умноженное на сумму без текущей карточки

• Найдем ~~как изменится сумма на~~ сумму чисел на карточках с текущей карточкой, это сумма сумм чисел без текущей карточки и числа на текущей карточке

$$S' = S + X$$

После этого новая карточка становится текущей и процесс повторяется, как $X' = y$ сказано в условии.

Рассмотрим первые шаги по данному алгоритму

Сначала рассмотрим как изменяется степень 2 ~~в~~ из текущего числа в новое

$$y = x + xpr = x(pr+1)$$

она увеличивается на степень вхождения 2 в ~~в~~ число $pr+1$, то есть если число pr четное то она не изменяется.

Алгоритм одной минуты:

$$y = x + x \cdot pr = (pr+1)x$$
$$pr' = pr + x \cdot s$$
$$s' = s + x$$
$$x' = y$$

I раз x-неч pr-неч s-неч (описано выше)

$y = ч \cdot н = ч$

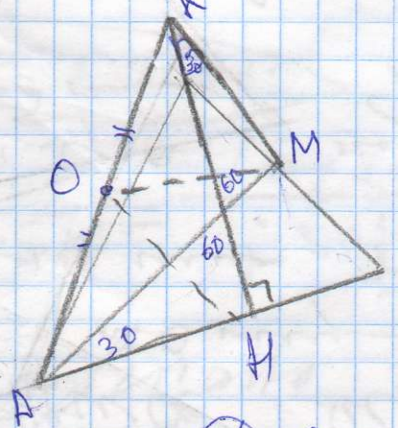
$pr' = н + н \cdot н = ч$

$s' = н + н = ч$

$x' = ч$

Т) Раз заметим, что степень двойки
вхождения в числа текущего => в число нового
не уменьшается значит число
х после этого шага всегда четно
Р(-четно х-четно, значит
по индукции в последующем
оно всегда четно, тогда
степень двойки в числе х
после первого шага увеличиваться
не будет, и если после года
таких операций мы достигнем
степени вхождения 2 — 10000
то мы достигнем её и
после первого шага, первой
минут, а значит т.к. она
не уменьшается то и
после суток выполнения
такой операции она
не изменится (степень вход. 2)
то есть будет 10000 что и т.д.

№6.



Дано: $\triangle ABC$ остроуг.
AM медиана
BH высота
$MK \perp AM$ $K \in [HB)$
$\angle MAC = 30°$
Д-ть: ~~$\angle MA$~~
AK = BC

Д-во

1 точки ~~AKB~~ AKMH лежат на одной окружности с диаметром AK т.о. надо д-ть, что
MO = MC = BB