№1.

~~Да~~ Можно например $1\cdot1\cdot676=676$

$(1-3)(1-3)(676-3)=673\cdot4=2692$

$2692-2016=676=1\cdot1\cdot676$

тогда $(1-3)(1-3)(676-3)=1\cdot1\cdot676+2016$

Ответ: да можно.

№2

Предположим есть стратегия, помогающая Пете гарантированно выиграть за один ход, тогда рассмотрим расстановку при этой стратегии и переместим ладью из I ~~кол~~ строчки во II (это как?) из II в III и из III в I. расстановка ладей показывает, ~~что~~ ~~какие кл~~ один из вариантов выбора клеток Васей, при котором данная стратегия не работает, аналогично для любой другой стратегии победы за 1 ход, т.е независимо от того, как сходите I ход есть вероятность, что окажется нечётное количество

почему это верно

отмеченных клеток под ладьями, и это не гарантированная победа — противоречие, значит нужно сделать не менее 2 ходов.

стратегия победы за 2 хода:

I ход: поставить ладьи в произвольном порядке, не по правилам игры и узнать какие ладьи стоят на ~~местах~~ отмеченных клетках.

II ход

- если отмеченных клеток чётное количество Петя уже победил

- ~~если~~ иначе отмеченных и неотмеченных ладей нечётное количество, тогда возьмём 1 отмеченную ладью, пусть её координаты $(i;j)$ и 1 неотмеченную с координатами $(k;l)$, мы переместим ладью с $(i;j)$ в $(k;j)$ и с $(k;l)$ в $(i;l)$ эти клетки не отмечены, так как в горизонтали i и вертикали j уже есть отмеченная клетка $(i;j)$

тогда мы уменьшили на 1 количество ладей на отмеченных клетках и не увеличивали его, тогда это количество из нечётного стало чётным, тогда остальные ладьи расставляем на прежние места. (как в I ходе)

Итого: за 2 хода Петя может выиграть

Ответ: за 2 хода.

№3.

Раскроем скобки сразу

$(x+y)(y+z)(z+x) = (xy + xz + y^2 + yz)(z+x) =$

$= xyz + xz^2 + y^2z + z^2y + x^2y + x^2z + xy^2 + xyz$. Пусть это равно $x^3+y^3+z^3$, тогда

$x^3+y^3+z^3 - xz^2 - xy^2 - x^2z - x^2y - y^2z - yz^2 =$

$= 2xyz$

$x^2(x-y-z) + y^2(y-x-z) + z^2(z-y-x) = 2xyz$

Из условия существования треугольника

$$\begin{cases} y+z>x \\ x+z>y \\ y+x>z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z<0 \\ y-x-z<0 \\ z-x-y<0 \end{cases}$$

$x, y, z > 0$ т.к. это длины сторон

x^2, y^2, z все больше нуля, тогда

$x^2(x-y-z)<0$

$y^2(y-x-z)<0$

$z^2(z-x-y)<0$

, тогда их сумма меньше 0, но xyz больше нуля - противоречие, значит таких x, y, z нет.

<u>Ответ</u>: не существует.

№1

Как известно, сумма ир. рационального числа и рационального — число иррациональное, тогда постараемся минимизировать количество таких пар: пусть сверху $25+k$ иррациональных, тогда рациональных $25-k$; ~~сверху~~ слева иррациональных $25-k$ и рациональных $25+k$, тогда всего таких пар $(25+k)^2+(25-k)^2=2\cdot 25^2+2k^2 \geq$ $\geq 2\cdot 25^2$ равенство при $k=0$, то есть сверху и слева по 25 рациональных и иррациональных

пример

в строчке $1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2} \ldots 25+\sqrt{2}, 1, 2, 3 \ldots 25$

в столбце $1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2} \ldots 25-\sqrt{2}, 26, 27, 28 \ldots 30.$

на пересечении ир. и рац → иррациональное число

их $25^2\cdot 2=1250$

на пересечении рац и рац → рациональное число

их $25^2=625$

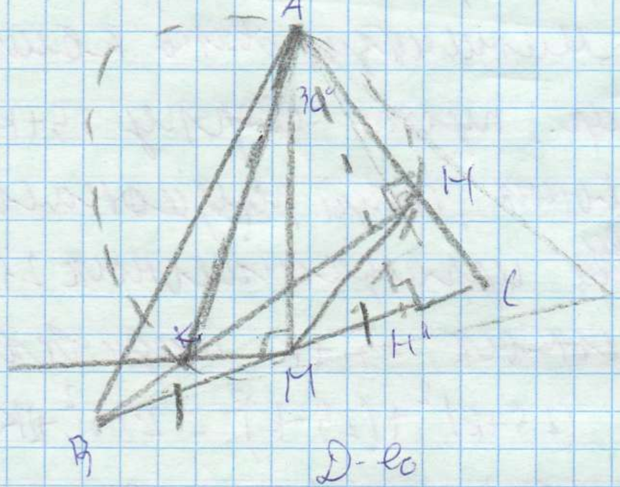
на пересечении ир. и ир. → ~~рацио~~ $x+\sqrt{2}+y-\sqrt{2}=x+y$, где $x, y \in N$ — рациональное число

их $25^2=625$

всего палиндромных чисел 625+625= =1250

Ответ: 1250.

№2.



Дано
$\triangle ABC$
AM - медиана
BH - высота
$KM \perp AM$
$K = KM \cap BH$
$\angle MAC = 30^\circ$
Доказать
$AK = BC$

Д-во

$\angle AMK = \angle AHK = 90^\circ$ тогда A M K H лежат на одной окружности, тогда $\angle KAM = \angle KHM = \angle BHM$ т.к. они опираются на одну дугу это один и тот же угол HM - медиана ~~от~~ к гипотенузе в прямоугольном $\triangle HBC$, тогда $HM = \frac{1}{2} BC = BM$, тогда $\triangle HMB$ - равнобедренный, поэтому $\angle HBM = \angle BHM$, тогда $\angle HBM = \angle KAM$ $\angle HBM = \angle HBC = \angle KAM$.

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM' \cdot MC = \frac{1}{2} AH' \cdot BM =$

$= S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \angle MAC$, тогда

$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AM \cdot AC$

но

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC$, тогда

$\frac{1}{2} AM \cdot AC = \frac{1}{2} BH \cdot AC$, откуда

$AM = BH \Leftrightarrow \frac{AM}{\cos \angle KAM} = \frac{BH}{\cos \angle KAM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{AM}{\cos \angle KAM} = \frac{BH}{\cos \angle HBC} \Leftrightarrow AK = BC$, что

и требовалось доказать.

№7

~~Предположим, что не найдутся~~

Назовем треугольник внешним, если

2 его стороны — стороны многоуголь-

ника, ~~тогда~~

Предположим, что все стороны

многоугольника разной длины.

~~тогда~~ во внешнем треугольнике

III сторона - не являющаяся стороной многоугольника равна одной из двух других ~~много~~ 2 стороны многоуголь- [illegible] *, ~~тогда одинного всех трёх сторон различны, поэтому можно применить эту тогда рассмотрим многоугольник без внешних треугольников, в нём также не останется~~ это будет ~~вс~~ ~~противоречие~~ ~~предположение~~. Будем ~~делать так, потом~~ пока не останется ~~один или 2 треугольника~~

доказали, что всегда найдётся внешний треугольник. Пусть это не так, тогда треугольников, у которых 1 общая сторона с многоугольником, n (n - количество сторон многоугольника), но сумма их углов $= n \cdot 180°$, что $>$ $(n-2) \cdot 180°$ - сумма углов многоугольника, значит такого не может быть - противо

речие, значит не
каждом шаге есть
хотя две стороны внешний треуголь-
ник.
тогда возьмём внешний ~~треугольник~~ ~~взять~~ его
тогда третья сторона ~~этого внешнего треу-~~
~~гольника~~ отлична от всех сторон
многоугольника (не считая стороны
внешнего треугольника), тогда ~~возьмём~~
~~новые~~ уберём ~~на~~ внешний треу-
гольник от многоугольника и
получим новый многоугольник, в
котором также любой треугольник
и все стороны различны
равнобедренный. Будем так делать,
пока не останется 1 треугольник.
(Выше было доказано почему мы так
всегда можем делать) В итоге у нас
остался треугольник, у которого
все стороны различны, но который
является равнобедренным - про-
тиворечие. значит в исходном

многоугольнике есть две равные стороны.
А значит две стороны исходного многоугольника равны, что уже противоречит предположению