10-03

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Региональный этап
20 января 2020 г.

Фамилия Князев

Имя Матвей

Отчество Сергеевич

Класс 10

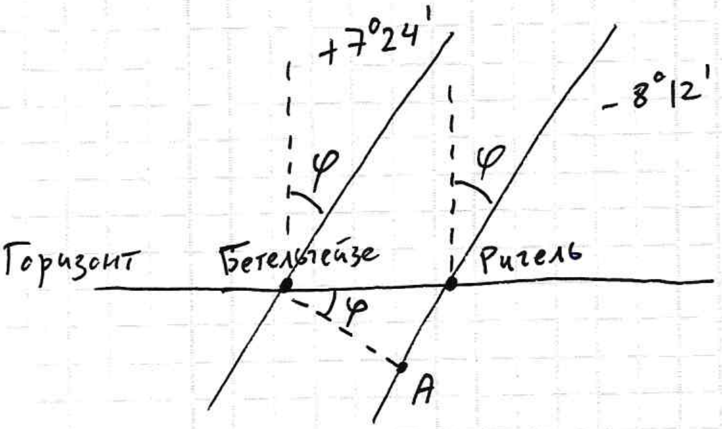
Территория г. Березники, Пермский край

Образовательная организация МАОУ "СОШ с УИОП №3"

Сумма 26 б. Кузаев А.Ф., Субботин С.В., Шаргов М.Ш. 10-03

1	2	3	4	5	6	Σ
8	8	3	0	4	3	26

№ 1



На широте φ параллели, под которыми происходит видимое движение звёзд, пересекают горизонт под углом 90° − φ

Отметим точку A с прямым восхождением, как у Бетельгейзе, т.е. $5^h 55.2^m$, и склонением, как у Ригеля, т.е. −8°12'

Треугольник с вершинами в точках небесной сферы, соот-щих Бетельгейзе, Ригелю и A будем, в виду малости его размеров, приближённо считать плоским. Тогда

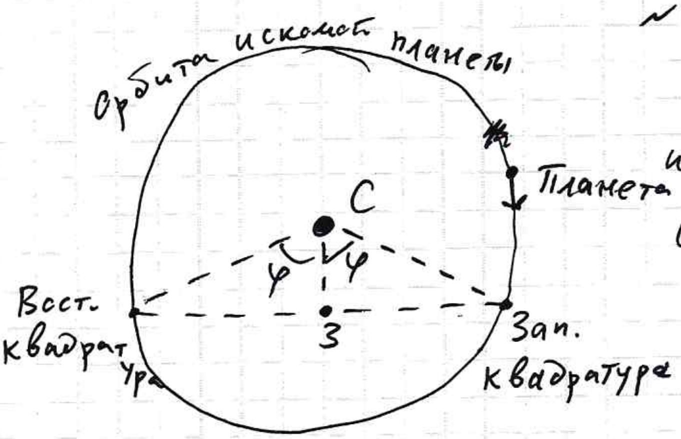
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A\text{-Ригель}}{A\text{-Бетельгейзе}} = \frac{\frac{5^h 55.2^m - 5^h 14.5^m}{24^h}\cdot 2\pi R_{\text{неб-сф.}}}{\frac{7^\circ 24' + 8^\circ 12'}{360^\circ}\cdot 2\pi R_{\text{неб-сф.}}} =$$

$$= \frac{\frac{40.7}{60\cdot 24}}{\frac{15.6}{360}} = 0.652 \rightarrow \varphi \approx 33^\circ$$

Т.к. звёзды взошли одновременно, то это должно было произойти в сев. полушарии, ибо в южном Ригель бы всегда восходил раньше, т.к. у него меньше прямое восхождение, чем у Бетельгейзе, и он южнее

Ответ: $\varphi = +33^\circ$

№2



Перейдём в СО, связанную с Солнцем и вращающуюся с $\omega_0 = \frac{2\pi}{1 \text{ год}}$. В ней Солнце и Земля неподвижны, а планета движется в обратном направлении, т.к. $\omega_0 > \omega_{\text{планеты}}$.

Обозначим угловую ск-ть планеты через ω. Тогда между зап. и вост. квадратурой проходит $t_1 = \frac{2\varphi}{\omega}$, а между вост. и зап. — $t_2 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega}$ ($\cos\varphi = \frac{1 \text{ а.е.}}{R}$, как видно из рисунка)

$$\frac{2\pi - 2\varphi}{\omega} = 1.143 \cdot \frac{2\varphi}{\omega}$$

$$\pi - \varphi = 1.143\varphi \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2.143}$$

$$\frac{1 \text{ а.е.}}{R} = \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2.143} \rightarrow R = \frac{1 \text{ а.е.}}{\cos\frac{\pi}{2.143}} = 9.56 \text{ а.е.} \rightarrow \text{эта планета — Сатурн}$$

Ответ: Сатурн

№ 3

Новый синод. период S будет равен $S = \frac{1\text{ год}}{12}$

Тогда новый сидер. период T можно посчитать по формуле

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} - \frac{1}{\text{год}} = \frac{12}{\text{год}} - \frac{1}{\text{год}} = \frac{11}{\text{год}} \rightarrow T = \frac{1\text{ год}}{11} = \frac{365.242\text{ сут}}{11} =$$

$= 33.204$ сут ⊖

Сейчас сидер. период $T_0 = 27.322$ сут, а большая полуось

$$a_0 = \frac{\text{мин. расст. от Луны до Земли} + \text{макс. расст. от Луны до Земли}}{2} =$$

$$= \frac{356\,410\text{ км} + 406\,700\text{ км}}{2} = 381\,560\text{ км}$$

Найдём новую большую полуось орбиты a из III-го з-на Кеплера:

$$\frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{a^3}{T^2} \rightarrow a = a_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} = 381\,560\text{ км} \cdot \left(\frac{33.204}{27.322}\right)^{2/3} = 434\,530\text{ км}$$

Найдём мин расст. x до Луны, при к-ром возможно полное Солн. затмение. Для этого угл. размер Луны должен быть больше угл. размера Солнца:

$$\frac{R_{\text{луны}}}{x} = \frac{R_{\text{солнца}}}{1.017\text{ а.е.}}$$ ($R_{\text{луны}}$, $R_{\text{солнца}}$ – радиусы Луны и Солнца, 1.017 а.е. – макс. расст. от Земли до Солнца)

$$x = 1.017\text{ а.е.} \cdot \frac{R_{\text{луны}}}{R_{\text{солнца}}} = 1.017 \cdot 1.496 \cdot 10^8\text{ км} \cdot \frac{1738\text{ км}}{695\,500\text{ км}} = 380\,190\text{ км}$$

Чтобы ~~на~~ при новой орбите Луны можно было наблюдать полн. солн. затмения, нужно чтобы мин. расст. до Луны было $\geq x$, т.е. $a(1-e) \geq x$

$$1 - e \geq \frac{x}{a} \rightarrow e_{min} = 1 - \frac{x}{a}$$

$$e_{min} = 1 - \frac{380\,190\text{ км}}{434\,530\text{ км}} = 0.125$$

Ответ: мин эксцентриситет равен 0.125

№6

Обозначим кол-во осколков через N, нач. радиус ядра R_0. Для простоты вычислений будем считать, что все осколки имеют радиус r, а их плотность равна плотности кометы ρ. Тогда, т.к. масса кометы равна массе осколков, то $\frac{4}{3}\pi R_0^3\rho = N\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho \rightarrow r = \frac{R}{\sqrt[3]{N}}$

Площадь до взрыва $S_0 = \pi R_0^2$, после взрыва $S = N\cdot\pi r^2 = N\cdot\pi\frac{R^2}{N^{2/3}} = \sqrt[3]{N}\pi R^2$,

т.е. $S = \sqrt[3]{N}S_0$ — площадь осколков в $\sqrt[3]{N}$ раз больше площади кометы (здесь под площадью я имел ввиду площадь, видимую с Земли, т.е. πR^2, а не площадь пов-ти, т.е. $4\pi R^2$; впрочем, далее мне нужно только отношение площадей, а не они сами, так что на решение это не влияет)

Яркость кометы пропорциональна её площади; звёздная величина уменьшилась на 14 (была = 17, стала = 3) $\rightarrow$ яркость увеличилась ~~на~~ в $10^{0.4\cdot14} = 400\,000$ $\rightarrow$ площадь увеличилась во столько же раз.

т.е. $\sqrt[3]{N} = 4\cdot10^5$, $N = 6.4\cdot10^{16}$

Найдём теперь объём, занимаемый осколками, считая, что они занимают шар радиуса R (шар, ибо взрыв изотропный). Тогда

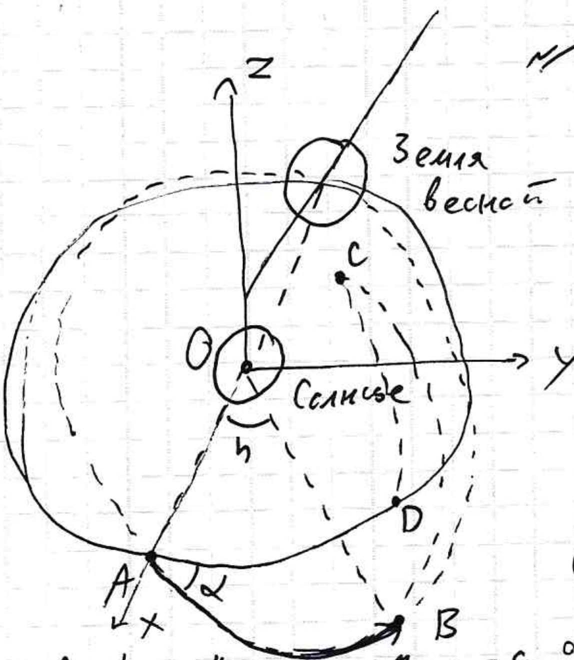
$2R = 1.6$ а.е. $\cdot$ (13' в рад) $= 1.6$ а.е. $\cdot\frac{13\cdot2\pi}{60\cdot360} \approx 9.1\cdot10^8$ м $= 9.1\cdot10^5$ км

$R = 4.53\cdot10^5$ км

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\cdot3.14\cdot(4.53\cdot10^5)^3 = 3.9\cdot10^{17}$ км^3

$n = \frac{N}{V} = \frac{6.4\cdot10^{16}}{3.9\cdot10^{17}\text{ км}^3} = 0.16$ км$^{-3}$

Ответ: $n = 0.16$ км$^{-3}$



№6 №5

Введём СК, связанную с Солнцем, аналогичную экваториальной СК для Земли, но вместо плоскости экватора возьмём плоскость орбиты Земли. (Эти коорд. не меняются при движении полюса) Также введём Декартову СК с началом в Солнце, плоскость xy = плоскость орбиты, напр. от Солнца на Ox совпадает с направлением от Земли до Солнца в день весеннего равноденствия.

$\alpha = 23^\circ 26' 21{,}45''$ — наклон экватора к эклиптике

$h = 2^h\, 31^m\, 48{,}7^s$

Посчитаем коорд. точки с прямым восхождением h и склонением 0

$\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$

$\vec{n}_2 = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ — вектор $\perp$ к окр. OAB

$$\begin{cases} \vec{r}\cdot\vec{n}_2 = 0 \\ r^2 = R^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y\sin\alpha + z\cos\alpha = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = R^2 = 1 \end{cases}$$

Эта система задаёт окр. AB (примем радиус небесной сферы R за 1)

Найдём коорд. x, y, z точки B

$r\cdot(1, 0, 0) = \cos h \rightarrow x = \cos h$

$$\begin{cases} y^2+z^2 = 1-\cos^2 h = \sin^2 h \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha = 0 \end{cases} \rightarrow y\sin\alpha = -z\cos\alpha$$

$$z = -y\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad y = \frac{-z}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$\frac{z^2}{\mathrm{tg}^2\alpha} + z^2 = \sin^2 h \rightarrow z^2 = \sin^2 h \sin^2\alpha, \quad z = -\sin h \sin\alpha \quad (z<0, \text{ как видно из рис.})$$

$$y = +\sin h \cos\alpha$$

Найдём теперь коорд. точки C с прямым восхождением h и склонением δ

Точки $(0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ (северный полюс мира), $(0,0,0)$, B лежат в плоскости большого круга, по которому отсчитывается склонение $\rightarrow$ этот круг задаётся системой:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos h & \sin h\cos\alpha & -\sin h\sin\alpha \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$$

10-03

$$\begin{cases} x(-\sin h\sin^2\alpha-\sin h\cos^2\alpha)-y(0-\cos\alpha\cos h)+z(-\sin\alpha\cos h)=0 \\ x^2+y^2+z^2=\cancel{q}\,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\sin h+y\cos\alpha\cos h-z\sin\alpha\cos h=0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=\cancel{q}\,1 & (2) \end{cases}$$

$$(x,y,z)\cdot(\cos h,\ \sin h\cos\alpha,\ -\sin h\sin\alpha)=\cos\delta$$

$$x\cos h+y\sin h\cos\alpha-z\sin\alpha\sin h=\cos\delta$$

$$x\sin h+y\frac{\sin^2 h}{\cos h}\cos\alpha-z\frac{\sin^2 h}{\cos h}\sin\alpha=\cos\delta\,tg\,h \quad (3)$$

$$y\frac{\cos\alpha}{\cos h}-z\frac{\sin\alpha}{\cos h}=\cos\delta\frac{\sin h}{\cos h} \qquad (1)+(3)$$

$$y\cos\alpha-z\sin\alpha=\cos\delta\sin h$$

$$y=\frac{\cos\delta\sin h+z\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Из (1) $x=\dfrac{y\cos\alpha\cos h-z\sin\alpha\cos h}{\sin h}=\dfrac{\cos\delta\sin h\cos h+z\sin\alpha\cos h-z\sin\alpha\cos h}{\sin h}=$

$=\cos\delta\cos h$

Из (2) $(\cos\delta\cos h)^2+\dfrac{(\cos\delta\sin h+z\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}+z^2=\cancel{q}$

$-\cos^2\alpha$

$\cancel{-1}+\cos^2\delta\cos^2 h\cos^2\alpha+\cos^2\delta\sin^2 h+2z\sin\alpha\cos\delta\sin h+z^2\sin^2\alpha+z^2\cos^2\alpha=$

$$z=\frac{-\sin\alpha\cos\delta\sin h\pm\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\delta\sin^2 h-\cos^2\delta\cos^2 h\cos^2\alpha-\cos^2\delta\sin^2 h+\ldots}}{\cancel{-\cos^2\alpha+\cos^2\delta\cos^2 h\cos^2\alpha+\cos^2\delta\sin^2 h}}=$$

$$=\frac{-\sin\alpha\cos\delta\sin h\pm\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\delta\cos^2\alpha}}{\cancel{-1+\cos^2\delta\cos^2 h\cos^2\alpha+\cos^2\delta\sin^2 h}}=\frac{-\sin\alpha\cos\delta\sin h\pm\cos\alpha\sin\delta}{\cancel{\cos^2\delta(\sin^2 h+\cos^2 h\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha}}\approx$$

$-\cos^2\alpha$

$$\cancel{=\frac{-0{,}39777\cdot0{,}0128\cdot0{,}615\pm\sqrt{1-(0{,}0128)^2\cdot(0{,}917)^2}}{-1+(0{,}0128)^2\left[(0{,}7885)^2\cdot(0{,}917)^2+0{,}615^2\right]}}=$$

$\cancel{\simeq 1-\sin\alpha\cos\delta\sin h}$ (с точностью до $\cos^2\delta$)

$$\simeq\frac{\sin\alpha\cos\delta\cancel{\sin h}\pm\cos\alpha\cancel{\sin\delta}}{\cancel{\cos^2\alpha}}$$

10-03

$z = \cos\alpha \sin\delta - \sin\alpha \cos\delta \sin h =$

$= 0.917482 \cdot 0.999918 - 0.397777 \cdot 0.0128429 \cdot 0.615014$

$= 0.914265$

$\theta = \arcsin z = 66.101565^\circ = \cancel{66^\circ 17' 15.65''}$ $66^\circ 06' 05.63''$ — угол между напр. на Полярную звезду и плоскостью земной орбиты, (аналог склонения)

Мин. угол между Полярной звездой и сев. полюсом будет равен $|\theta - (90^\circ - \alpha)| =$

$= |90^\circ - \alpha - \theta| = |90^\circ - 66^\circ 06' 05.63'' - 23^\circ 26' 21.45''| =$

$= |23^\circ 53' 54.37'' - 23^\circ 26' 21.45''| = 27' 32.92'' \approx \underline{\underline{27' 30''}}$

(Аналог склонения сев. полюса всегда равен $90^\circ - \alpha$, а аналог прямого восхождения меняется с периодом 25776 лет)

Аналогом прямого восх. сделаем угол AOD (аналогом склонения для светила был угол COD, D — проекция C на плоскость орбиты Земли)

№4

$\frac{\lambda}{D} \simeq$ ($2''$ в рад), где λ — длина волны наблюдаемого света, D — диаметр объектива, $D \approx \frac{(5000\,нм)^{+1}}{\frac{2}{3600} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} = 0.5\,м$

Фон слаб в 2 $\rightarrow$ $\Gamma^2 = 2$, $\Gamma = \sqrt{2} \approx 1.4$

№5 (продолжение)

Обозначим аналог прямого вох. через φ

$\cos\varphi = x \rightarrow$ ~~$\cos\varphi_{Пол.зв.} = \cos\delta \cos h = 0.012842 \cdot 0.78852 =$~~

~~$= 0.010126 \rightarrow \varphi_{пол.зв.} =$~~

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\cos\delta \sin h + \sin\alpha (\cos\alpha \sin\delta - \sin\alpha \cos\delta \sin h)}{\cos\delta \cos h} =$

$= \mathrm{tg}\,h + \frac{\sin\alpha}{\cos h} (\cos\alpha\, \mathrm{tg}\,\delta - \sin\alpha \sin h) =$

$= \mathrm{tg}\,h + \frac{\sin\alpha \cos\alpha\, \mathrm{tg}\,\delta}{\cos h} - \sin^2\alpha\, \mathrm{tg}\,h = \cos^2\alpha\, \mathrm{tg}\,h + \frac{\sin\alpha \cos\alpha\, \mathrm{tg}\,\delta}{\cos h}$

Для Полярной

$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}837 \cdot 2 \cdot 69 \cdot 0{,}78 \ldots$ → отсюда нах-ся $\varphi_{ПЗ}$

Для сев. полюса Сейчас:

$\operatorname{tg}\varphi = \infty$ (т.к. $\operatorname{tg}\delta = \infty$) → $\varphi_{СП} = 90°$

$t = \frac{\varphi_{сп} - \varphi_{ПЗ}}{360°} \cdot T$ (я не успел посчитать)